



01.

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة ب : $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = \frac{3+u_n}{5-u_n}$ لكل n من $\mathbb{N}$.

01. نتحقق أن : $u_{n+1} - 3 = \frac{4(u_n - 3)}{2 + (3 - u_n)}$ لكل n من $\mathbb{N}$.

• لدينا : $u_{n+1} - 3 = \frac{3+u_n}{5-u_n} - 3 = \frac{3+u_n - 15 + 3u_n}{5-u_n} = \frac{-12 + 4u_n}{5-u_n} = \frac{4(u_n - 3)}{2 + (3 - u_n)}$

خلاصة : $u_{n+1} - 3 = \frac{4(u_n - 3)}{2 + (3 - u_n)}$ لكل n من $\mathbb{N}$.

• نبين بالترجع : $u_n < 3$ لكل n من $\mathbb{N}$.

■ نتحقق أن العلاقة صحيحة من أجل $n = 0$.

لدينا : $2 < 3$ و $u_0 = 2$ ومنه العلاقة صحيحة من أجل $n = 0$.

■ نفترض أن العلاقة صحيحة إلى الرتبة n من $\mathbb{N}$ أي $u_n < 3$ (معطيات التراجع)

■ نبين أن العلاقة صحيحة للرتبة $n+1$ أي نبين أن : $u_{n+1} < 3$

حسب معطيات التراجع $u_n < 3$ ومنه $\left. \begin{array}{l} 4(u_n - 3) < 0 \\ 2 + (3 - u_n) > 0 \end{array} \right\}$ أي $\left. \begin{array}{l} u_n - 3 < 0 \\ 3 - u_n > 0 \end{array} \right\}$

و بالتالي $u_{n+1} - 3 = \frac{4(u_n - 3)}{2 + (3 - u_n)} < 0$ ومنه نستنتج أن $u_{n+1} - 3 < 0$ أي $u_{n+1} < 3$.

إذن : العلاقة صحيحة للرتبة $n+1$.

خلاصة : $u_n < 3$ لكل n من $\mathbb{N}$.

02. لتكن المتتالية العددية (v_n) المعرفة بما يلي : $u_0 = 2$ و $v_n = \frac{u_n - 1}{3 - u_n}$ لكل n من $\mathbb{N}$.

أ- نبين أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.

• لدينا : $v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{3 - u_{n+1}}$

$$\begin{aligned} &= \frac{\frac{3+u_n}{5-u_n} - 1}{3 - \frac{3+u_n}{5-u_n}} \\ &= \frac{\frac{3+u_n - 5 + u_n}{5-u_n}}{\frac{3(5-u_n) - 3 - u_n}{5-u_n}} \\ &= \frac{3+u_n - 5 + u_n}{15 - 3u_n - 3 - u_n} \\ &= \frac{2u_n - 2}{12 - 4u_n} = \frac{2(u_n - 1)}{4(3 - u_n)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{u_n - 1}{3 - u_n} = \frac{1}{2} v_n \end{aligned}$$



$$= \frac{-2 + 2u_n}{12 - 4u_n}$$

$$= \frac{2}{4} \times \frac{-1 + u_n}{3 - u_n}$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{2} v_n \quad \text{و منه :} \quad v_{n+1} = \frac{1}{2} \times v_n \quad \left(v_n = \frac{u_n - 1}{3 - u_n} \right)$$

خلاصة : المتتالية (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.

• نستنتج أن : $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ لكل n من $\mathbb{N}$.

بما أن : المتتالية (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ إذن حدها العام يكتب على الشكل التالي

$$v_n = v_{n_0} \times q^{n-n_0} ; (n_0 = 0)$$

$$= v_0 \left(\frac{1}{2}\right)^n ; \left(v_0 = \frac{u_0 - 1}{3 - u_0} = \frac{2 - 1}{3 - 2} = 1 \right)$$

$$= 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

خلاصة : $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ لكل n من $\mathbb{N}$.

ب- نبين أن : $u_n = \frac{1 + 3v_n}{1 + v_n}$ لكل n من $\mathbb{N}$.

$$v_n = \frac{u_n - 1}{3 - u_n} \Leftrightarrow 3v_n - v_n \times u_n = u_n - 1 \quad \text{لدينا :}$$

$$\Leftrightarrow -v_n \times u_n - u_n = -1 - 3v_n$$

$$\Leftrightarrow u_n \times (-1 - v_n) = -1 - 3v_n$$

$$\Leftrightarrow u_n = \frac{-1 - 3v_n}{-1 - v_n} = \frac{1 + 3v_n}{1 + v_n}$$

خلاصة : $u_n = \frac{1 + 3v_n}{1 + v_n}$ لكل n من $\mathbb{N}$.

• نكتب u_n بدلالة n

$$u_n = \frac{1 + 3v_n}{1 + v_n} = \frac{1 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n} \quad \text{لدينا :}$$



خلاصة : $u_n = \frac{1+3\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^n}$ (أو أيضا : $u_n = \frac{2^n+3}{2^n+1}$ غير ضرورية حسب السؤال الموالي)

ج- نحدد نهاية المتتالية (u_n)

• لدينا : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ لأن $-\frac{1}{2} < \frac{1}{2} < 1$ حسب خاصية .

• و منه : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1+3\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^n} = \frac{1+0}{1+0} = 1$

خلاصة : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$

02.

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، نعتبر النقط $A(2,1,3)$ و $B(3,1,1)$ و $C(2,2,1)$ و الفلكة (S) التي معادلتها ديكارتية : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 34 = 0$.

01.

أ- نبين أن : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$

لدينا : $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2-2 \\ 2-1 \\ 1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3-2 \\ 1-1 \\ 1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

و منه : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \vec{k} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$

خلاصة : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$

ب- نستنتج أن : $2x + 2y + z - 9 = 0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (ABC).

• لدينا : المتجهة $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}(2;2;1)$ منظمية على المستوى (ABC)
• و منه :

$$M(x,y,z) \in (ABC) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-2 \\ y-1 \\ z-3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(x-2) + 2(y-1) + 1(z-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x + 2y + z - 9 = 0$$



خلاصة : $2x + 2y + z - 9 = 0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) .

...02

أ- نبين أن : مركز الفلكة (S) هي النقطة $\Omega(1, -1, 0)$ و أن شعاعها $r = 6$ لدينا :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 34 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 - 1 + y^2 + 2y + 1 - 1 + z^2 - 34 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 - 1 + (y+1)^2 - 1 + z^2 - 34 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 36 = 6^2$$

و هي تمثل معادلة ديكارتية لفلكة مركزها $\Omega(1, -1, 0)$ و شعاعها $r = 6$.

خلاصة : مركز الفلكة (S) هي النقطة $\Omega(1, -1, 0)$ و أن شعاعها $r = 6$.

د- نبين أن : $d(\Omega, (ABC)) = 3$.

$$d(\Omega, (ABC)) = \frac{|2 \times 1 + 2(-1) + 0 - 9|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{9}{\sqrt{9}} = 3 \text{ لدينا :}$$

خلاصة : $d(\Omega, (ABC)) = 3$

• نستنتج أن المستوى (ABC) يقطع الفلكة وفق دائرة (Γ) .

بما أن : $(r = 6)$; $d(\Omega, (ABC)) = 3 < 6$ إذن المستوى (ABC) يقطع الفلكة وفق دائرة (Γ) .

خلاصة : المستوى (ABC) يقطع الفلكة وفق دائرة (Γ) .

...03

أ- نحدد تمثيل بارامترية للمستقيم (Δ) المار من النقطة Ω والعمودي على المستوى (ABC) .

• لدينا المتجهة : $\vec{AB} \wedge \vec{AC} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ موجهة ل (Δ) لأنها منظمية على المستوى (ABC) و $\Omega(1, -1, 0) \in (\Delta)$

• تمثيل بارامترية للمستقيم (Δ) هو : $t \in \mathbb{R}$; $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + 2t \\ z = t \end{cases}$ (Δ) :

• **خلاصة :** تمثيل بارامترية للمستقيم (Δ) هو : $t \in \mathbb{R}$; $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + 2t \\ z = t \end{cases}$ (Δ) .

ب- نبين أن : مركز الدائرة (Γ) هو النقطة B

نعلم أن مركز الدائرة هو المسقط العمودي لمركز الفلكة (S) على المستوى (ABC) أي تقاطع المستوى (ABC) و المستقيم (Δ) و منه :

$$M(x, y, z) \in (ABC) \cap (\Delta) \Leftrightarrow \begin{cases} M \in (ABC) \\ M \in (\Delta) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y + z - 9 = 0 \\ \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + 2t \\ z = t \end{cases} \end{cases}$$



$$\begin{aligned} & \begin{cases} 2(1+2t) + 2(-1+2t) + t - 9 = 0 \\ x = 1 + 2t \\ y = -1 + 2t \\ z = t \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 9t - 9 = 0 \\ x = 1 + 2t \\ y = -1 + 2t \\ z = t \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} t = 1 \\ x = 1 + 2 \times 1 = 3 \\ y = -1 + 2 \times 1 = 1 \\ z = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

ومنه : تقاطع المستوى (ABC) و المستقيم (Δ) هي النقطة B(3,1,1)

خلاصة : مركز الدائرة (Γ) هي النقطة B(3,1,1).

03.

01. نحل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 - 4z + 29 = 0$.

• نحسب المميز Δ : لدينا : $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 29 = 16 - 116 = -100 = i^2 \times 10^2 = (10i)^2$

• حل المعادلة هما : $z_1 = \frac{4+10i}{2} = 2+5i$ و $z_2 = \bar{z}_1 = 2-5i$

خلاصة : مجموعة حلول المعادلة هي : $S = \{2+5i; 2-5i\}$

01. نعتبر ، في المستوى العقدي (P) المنسوب إلى معلم متعامد منظم مباشر $(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ النقط Ω و A و B التي ألقاها على

التوالي هي a و b و c و ω حيث : $\omega = 2+5i$ و $a = 5+2i$ و $b = 5+8i$.

أ- ليكن u العدد الحقيقي حيث : $u = b - \omega$.

• نتحقق أن : $u = 3+3i$.

لدينا : $u = b - \omega = 5+8i - (2+5i) = 5+8i - 2-5i = 3+3i$.

خلاصة : $u = 3+3i$

• نبين أن : $\arg(u) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$.

لدينا : $u = 3+3i = 3(1+i) = [3;0] \times \left[\sqrt{2}; \frac{\pi}{4}\right] = \left[3\sqrt{2}; \frac{\pi}{4}\right]$: $\arg(u) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$ ومنه :

خلاصة : $\arg(u) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$

ب- نحدد عمدة العدد العقدي $\bar{u}$:
لدينا :



$$\begin{aligned}\arg(\bar{u}) &\equiv -\arg(u) [2\pi] \\ &\equiv -\arg(u) [2\pi] \\ &\equiv -\frac{\pi}{4} [2\pi]\end{aligned}$$

خلاصة : $\arg(\bar{u}) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$

ج- نتحقق أن : $a - \omega = \bar{u}$

• لدينا : $a - \omega = a = 5 + 2i - (2 + 5i) = 5 + 2i - 2 - 5i = 3 - 3i = \bar{u}$

خلاصة : $a - \omega = \bar{u}$

• نستنتج أن : $\Omega A = \Omega B$ و $\arg\left(\frac{b - \omega}{a - \omega}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$

لدينا :

$$\begin{aligned}|u| &= |\bar{u}| \Leftrightarrow |b - \omega| = |a - \omega| \\ &\Leftrightarrow \Omega B = \Omega A\end{aligned}$$

ومنه : $\Omega A = \Omega B$

لدينا :

$$\begin{aligned}\arg\left(\frac{b - \omega}{a - \omega}\right) &\equiv \arg\left(\frac{u}{\bar{u}}\right) [2\pi] \\ &\equiv \arg(u) - \arg(\bar{u}) [2\pi] \\ &\equiv \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) [2\pi] \\ &\equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]\end{aligned}$$

خلاصة : $\arg\left(\frac{b - \omega}{a - \omega}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$

د- لنعتبر الدوران R الذي مركزه Ω و زاويته $\frac{\pi}{2}$.

نحدد صورة النقطة A بالدوران R .

طريقة 1 :

لدينا :

• نعلم أن : $\arg\left(\frac{b - \omega}{a - \omega}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ $\arg(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$

و هذا يمثل أن B صورة A بالدوران الذي مركزه Ω و قياس $\Omega A = \Omega B$ أي $\arg\left(\frac{b - \omega}{a - \omega}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ $\arg(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$

زاويته هو $\frac{\pi}{2}$.



خلاصة : صورة النقطة A بالدوران R هي النقطة B التي لحقها $b = 5 + 8i$.

طريقة 2 : (غير مرغوب فيها حسب أجوبة الأسئلة السابقة)

لدينا الشكل العقدي هو : $z' - \omega = (z - \omega)e^{i\theta}$ مع ω هو لحق مركز الدوران و θ هو قياس زاوية الدوران :
و منه :

$$z' - (2 + 5i) = (z - (2 + 5i))e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$z' = 2 + 5i + (z - 2 - 5i)i \quad ; \quad \left(e^{i\frac{\pi}{2}} = i \right)$$

$$z' = iz + 2 + 5i - 2i + 5$$

$$z' = iz + 7 + 3i$$

خلاصة : الكتابة العقدية للدوران r $z' = iz + 7 + 3i$
و منه :

$$r(A) = A' \Leftrightarrow a' = i(5 + 2i) + 7 + 3i$$

$$\Leftrightarrow a' = 8i + 5 = b$$

خلاصة : صورة النقطة A بالدوران R هي النقطة B التي لحقها $b = 5 + 8i$.

04.

يحتوي صندوق : على 10 كرات أربع كرات حمراء و ست كرات خضراء (لا يمكن التمييز بين الكرات باللمس) .
نسحب عشوائيا و في آن واحد كرتين من الصندوق

01. ليكن A الحدث : " الكرتان المسحوبتان حمراوان "

$$\text{نبين أن : } p(A) = \frac{2}{15}$$

• عدد السحبات الممكنة : سحب كرتين في آن واحد من بين 10 كرات يمثل تاليفة ل 2 من بين 10 .

$$\text{و منه : } \text{card}\Omega = C_{10}^2 = \frac{10 \times 9}{1 \times 2} = 45$$

• نحسب $\text{card}A$

$$\text{الكرتان المسحوبتان حمراوان من بين 4 يمثل تاليفة ل 2 من بين 4 و منه : } \text{card}A = C_4^2 = \frac{4 \times 3}{1 \times 2} = 6$$

$$\text{ومنه : } p(A) = \frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega} = \frac{C_4^2}{C_{10}^2} = \frac{6}{45} = \frac{2}{15}$$

$$\text{خلاصة : } p(A) = \frac{2}{15}$$

02. ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة بعدد الكرات الحمراء المتبقية في الصندوق بعد سحب الكرتين .

أ- نبين أن مجموعة القيم التي يأخذها المتغير العشوائي X هي $\{2, 3, 4\}$.

- عندما نسحب كرتين من اللون الأحمر يبقى في الصندوق كرتين من اللون الأحمر إذن القيمة ل X هي 2 .
- عندما نسحب كرتين من اللون الأخضر يبقى في الصندوق أربع كرات من اللون الأحمر إذن القيمة ل X هي 4 .
- عندما نسحب كرة من اللون الأحمر و الأخرى من اللون الأخضر يبقى في الصندوق ثلاث كرات من اللون الأحمر إذن القيمة ل X هي 3

خلاصة : مجموعة القيم التي يأخذها المتغير العشوائي X هي $X(\Omega) = \{2, 3, 4\}$.



ب- نبين أن : $p(X=3) = \frac{8}{15}$

• الحدث $(X=3)$ يمثل الحدث " سحب كرتين من لونين مختلفين "

و منه : سحب كرة حمراء من بين 4 إذن $C_4^1 = 4$ و كرة خضراء من بين 6 إذن $C_6^1 = 6$ ومنه $\text{card}(X=3) = C_4^1 \times C_6^1 = 24$

و بالتالي : $p(X=3) = \frac{C_4^1 \times C_6^1}{C_{10}^2} = \frac{24}{45} = \frac{8 \times 3}{15 \times 3} = \frac{8}{15}$

خلاصة : $p(X=3) = \frac{8}{15}$

• نحدد قانون احتمال المتغير العشوائي X نلخص ذلك بالجدول التالي :

سحب لكرتين	من اللون الأحمر	احدهما حمراء و الأخرى خضراء	من اللون الأخضر	المجموع
X_i	2	3	4	
$p(X=x_i)$	$p(X=2) = \frac{C_4^2}{C_{10}^2} = \frac{6}{45} = \frac{2}{15}$	$p(X=3) = \frac{C_4^1 \times C_6^1}{C_{10}^2} = \frac{8}{15}$	$p(X=4) = \frac{C_6^2}{C_{10}^2} = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}$	1

05.

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x) = 2x - 2 + e^{2x} - 4e^x$

ليكن (C_f) منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (الوحدة 1 cm)

I.

01.

أ- نبين أن : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

لدينا : $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x - 2 = -\infty$ ومنه : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x - 2 + e^{2x} - 4e^x = -\infty$

خلاصة : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

ب- نبين أن المستقيم (D) الذي معادلته $y = 2x - 2$ مقارب للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$.

لدينا : $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ ومنه :

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (2x - 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x - 2 + e^{2x} - 4e^x - (2x - 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} - 4e^x = 0$

و منه : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (2x - 2) = 0$

خلاصة : المستقيم (D) الذي معادلته $y = 2x - 2$ مقارب للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$.

02.

أ- نبين أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$



لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - 2 = +\infty$ لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - 2 + e^{2x} - 4e^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - 2 + e^x (e^x - 4) = +\infty$ و

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x (e^x - 4) = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

خلاصة : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

ب- نبين أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 2 + e^{2x} - 4e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 2}{x} + \frac{e^x}{x} (e^x - 4) = +\infty$$

$$\text{لأن : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 2}{x} = 2 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - 4 = +\infty$$

خلاصة : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

نؤول النتيجة هندسيا :

(C_f) منحنى الدالة f يقبل فرع شلجمي في اتجاه محور الأرتايب بجوار +∞ .

03

أ- نبين أن : $f'(x) = 2(e^x - 1)^2$ لكل x من $\mathbb{R}$.

لدينا : الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ لأنها مجموع عدة دوال قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

$$\text{لدينا : } f'(x) = (2x - 2 + e^{2x} - 4e^x)' = 2 + 2e^{2x} - 4e^x = 2(1 + (e^x)^2 - 2e^x) = 2((e^x)^2 - 2e^x + 1) = 2(e^x - 1)^2$$

خلاصة : $f'(x) = 2(e^x - 1)^2$ لكل x من $\mathbb{R}$.

ب- نضع جدول تغيرات f

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	+	0	+
f	$-\infty$	0	$+\infty$

ج- بين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $]1, \ln 4[$ حيث $f(\alpha) = 0$.

■ نثبت أن : f تقابل من $]1, \ln 4[$ إلى $f(]1, \ln 4[)$

الدالة f متصلة لأنها قابلة للاشتقاق (أو أيضا مجموع عدة دوال متصلة) على $]1, \ln 4[$

f تزايدية قطعاً على $]1, \ln 4[$ (إذن f تقابل من $]1, \ln 4[$ إلى $]e^2 - 4e; 4\ln 2 - 2[$)

■ لدينا $f(1) \times f(\ln 4) = (e^2 - 4e)(4\ln 2 - 2) = \underbrace{e(e - 4)}_{<0} \times \underbrace{2(2\ln 2 - 1)}_{>0} < 0$; $(2\ln 2 - 1 = \ln 4 - \ln e > 0 ; 4 > e)$

■ ومنه : $0 \in f([1, \ln 4]) =]e^2 - 4e; 4\ln 2 - 2[$

■ إذن حسب مبرهنة القيم الوسيطة يوجد عدد وحيد α من المجال $]1, \ln 4[$ حيث $f(\alpha) = 0$ (أو أيضا حسب الدالة f تقابل)

خلاصة : يوجد عدد وحيد α من المجال $]1, \ln 4[$ حيث $f(\alpha) = 0$.

..04

أ- نبين أن المنحنى (C_f) يوجد فوق المستقيم (D) على المجال $[\ln 4; +\infty[$ وتحت المستقيم (D) على المجال $] -\infty; \ln 4[$.

لهذا ندرس إشارة $f(x) - (2x - 2)$.

لدينا :

$$f(x) - (2x - 2) = 2x - 2 + e^{2x} - 4e^x - 2x + 2 = e^x(e^x - 4)$$

إشارة الفرق هي إشارة $e^x - 4$ لأن $e^x > 0$

ندرس إشارة $e^x - 4$

ومنه :

$$e^x - 4 > 0 \Leftrightarrow e^x > 4$$

$$\Leftrightarrow \ln(e^x) > \ln 4$$

$$\Leftrightarrow x > \ln 4$$

وضع (C_f) و المستقيم بواسطة الجدول التالي :

x	$-\infty$	$\ln 4$	$+\infty$
$f(x) - (2x - 2)$	-	0	+
الوضع النسبي ل (C_f) و المستقيم (D)	(D) تحت (C_f)		(D) فوق (C_f)
	(D) يقطع (C_f)		

ب- نبين أن : المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف وحيدة زوج إحداثياتها هو $(0, -5)$.

• نحسب الدالة المشتقة الثانية لتحديد نقط انعطاف f .

لدينا : $f'(x) = 2(e^x - 1)^2$ و منه : $f''(x) = [2(e^x - 1)^2]' = 2 \times 2(e^x - 1)'(e^x - 1) = 4e^x(e^x - 1)$

• إشارة f'' هي إشارة $e^x - 1$ و منه :

$$e^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 1$$

$$\Leftrightarrow \ln(e^x) \geq \ln 1$$

$$\Leftrightarrow x \geq 0$$

إشارة f'' بواسطة الجدول التالي :

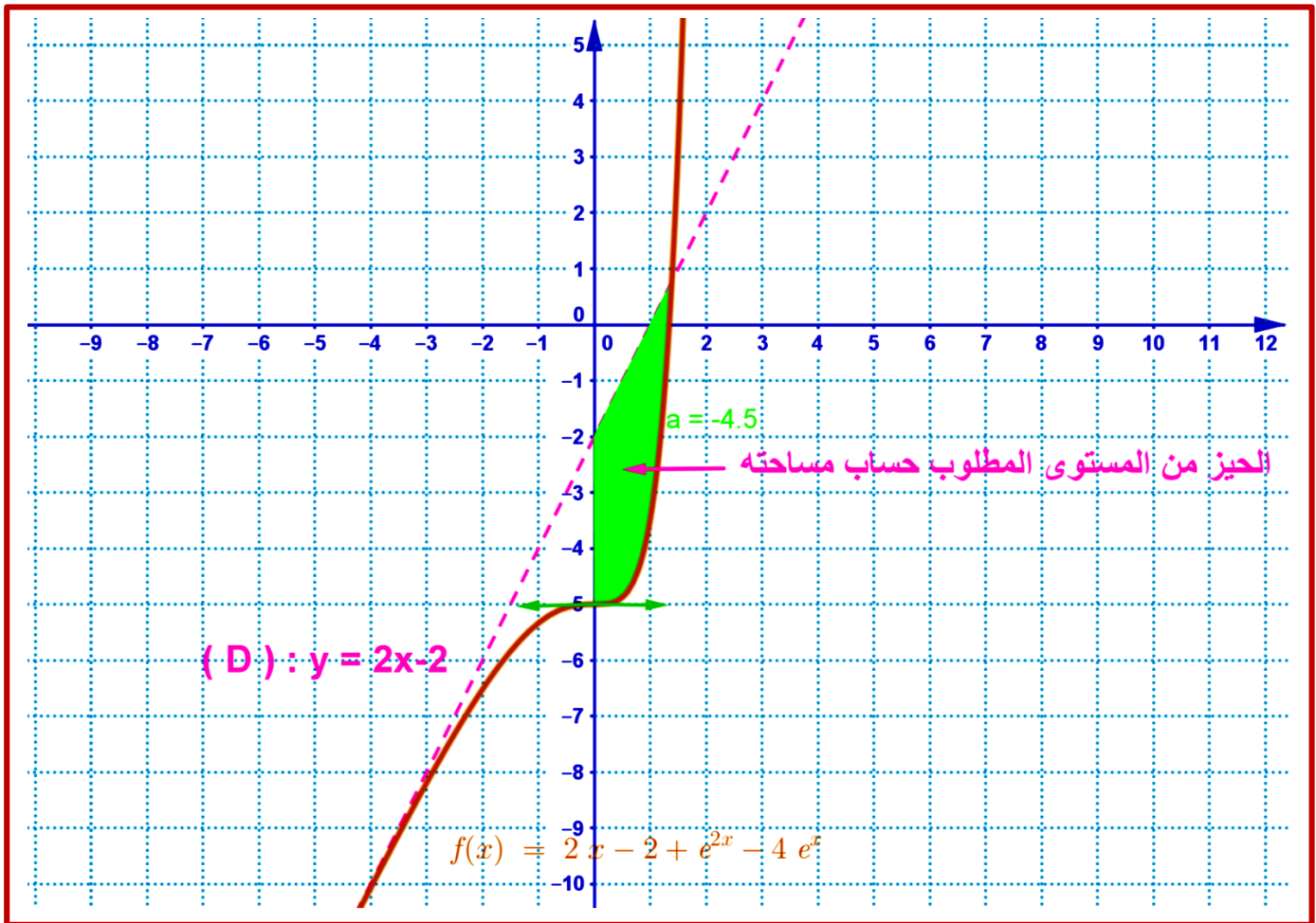
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+

ومنه : الدالة المشتقة الثانية تنعدم في $x_0 = 0$ و تتغير إشارتها بحوار $x_0 = 0$ إذن النقطة التي أفصولها $x_0 = 0$ هي نقطة

$$f(0) = 2 \times 0 - 2 + e^{2 \times 0} - 4e^0 = -2 + 1 - 4 = -5$$

انعطاف و حيدة و لدينا $f(0) = -5$ **خلاصة :** المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف وحيدة زوج إحداثياتها هو $(0, -5)$.

جـ ننشئ المستقيم (D) و المنحنى (C_f) في نفس المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (نأخذ $\ln 4 \approx 1,4$ و $\alpha \approx 1,3$).



05..

أـ نبين أن : $\int_0^{\ln 4} (e^{2x} - 4e^x) dx = -\frac{9}{2}$

لدينا :

$$\int_0^{\ln 4} (e^{2x} - 4e^x) dx = \left[\frac{1}{2} e^{2x} - 4e^x \right]_0^{\ln 4} = \frac{1}{2} e^{2 \ln 4} - 4e^{\ln 4} - \left(\frac{1}{2} e^{2 \times 0} - 4e^0 \right) = \frac{1}{2} \times e^{\ln 16} - 4 \times 4 - \left(\frac{1}{2} \times 1 - 4 \times 1 \right) = -\frac{9}{2}$$

خلاصة : $\int_0^{\ln 4} (e^{2x} - 4e^x) dx = -\frac{9}{2}$

بـ نحسب ب cm^2 مساحة حيز من المستوى المحصور بين المنحنى (C_f) و المستقيم (D) و محور الأرتاب و المستقيم الذي

معادلته $x = \ln 4$

المساحة المطلوبة هي :

$$\int_0^{\ln 4} ((2x-2)-f(x))dx = \int_0^{\ln 4} -(e^{2x}-4e^x)dx = -\int_0^{\ln 4} (e^{2x}-4e^x)dx = -\left(\frac{-9}{2}\right) = \frac{9}{2} \text{ cm}^2$$

خلاصة : مساحة حيز من المستوى المحصور بين المنحنى (C_f) و المستقيم (D) و محور الأرتيب و المستقيم الذي معادلته $x = \ln 4$

هي $\frac{9}{2} \text{ cm}^2$

...II

...01

أ- نحل المعادلة التفاضلية : $y''-3y'+2y=0$

هي معادلة على شكل $y''+ay'+by=0$ ومنه المعادلة المميزة هي : $r^2-3r+2=0$

نحل المعادلة المميزة :

لدينا :

$$r^2-3r+2=0 \Leftrightarrow r^2-r-2r+2=0$$

$$\Leftrightarrow r(r-1)-2(r-1)=0$$

$$\Leftrightarrow (r-1)(r-2)=0$$

$$\Leftrightarrow r=1 \text{ أو } r=2$$

و منه المعادلة المميزة لها حلين حقيقيين $r_1=1$ و $r_2=2$

و بالتالي : الحل العام للمعادلة التفاضلية هي الدوال التي على شكل : $y = \alpha e^x + \beta e^{2x}$ مع α و β من $\mathbb{R}$.

ب- نحدد الحل g للمعادلة (E) الذي يحقق الشرطين $g(0)=-3$ و $g'(0)=-2$.

لدينا : $g(x) = \alpha e^x + \beta e^{2x}$ نحدد α و β حيث : $g(0)=-3$ و $g'(0)=-2$.

لدينا : $g'(x) = (\alpha e^x + \beta e^{2x})' = \alpha e^x + 2\beta e^{2x}$ ومنه $g'(0)=-2 \Leftrightarrow \alpha \times 1 + 2\beta \times 1 = -2$

و $g(0)=-3 \Leftrightarrow \alpha \times 1 + \beta \times 1 = -3$

نحصل على النظام : $\begin{cases} \alpha + 2\beta = -2 \\ \alpha + \beta = -3 \end{cases}$ ومنه : $\alpha = -4$ و $\beta = 1$

خلاصة : الحل g للمعادلة (E) الذي يحقق الشرطين $g(0)=-3$ و $g'(0)=-2$ هي $g(x) = e^{2x} - 4e^x$.

02. لتكن h الدالة العددية المعرفة على $]\ln 4; +\infty[$ بما يلي : $h(x) = \ln(e^{2x} - 4e^x)$.

أ- نبين أن الدالة h تقبل دالة عكسية h^{-1} و أن h^{-1} معرفة على $\mathbb{R}$.

نلاحظ أن : $h(x) = \ln(g(x))$ و $f(x) - (2x-2) = e^{2x} - 4e^x = g(x)$

• اتصال h على $]\ln 4; +\infty[$:

لدينا الدالة : $x \mapsto e^{2x} - 4e^x$: g متصلة (لأنها قابلة للاشتقاق مرتين و ذلك حل خاص للمعادلة التفاضلية من الدرجة 2) و موجبة

قطعا على $]\ln 4; +\infty[$ (لأن المنحنى (C_f) يوجد فوق المستقيم (D) على المجال $]\ln 4; +\infty[$ ومنه

$$(f(x) - (2x-2) = e^{2x} - 4e^x = g(x) > 0$$

• الدالة : $x \mapsto \ln x$ متصلة على $]0; +\infty[$

- و منه : الدالة : $h(x) = \ln(e^{2x} - 4e^x)$ متصلة على $]\ln 4; +\infty[$ لأنها مركبة دالتين متصلتين .
- الرتبة قطعا على $]\ln 4; +\infty[$:
- لدينا الدالة : $x \mapsto \ln x$ تزايدية قطعا على $]0; +\infty[$
- لدينا الدالة : $x \mapsto e^{2x} - 4e^x$ قابلة للاشتقاق على $]\ln 4; +\infty[$ مع دالتها المشتقة هي $x \mapsto 2e^{2x} - 4e^x = 2e^x(e^x - 2)$ إشارتها هي إشارة $e^x - 2$ و منه : $e^x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > \ln 2$ إذن الدالة $x \mapsto e^{2x} - 4e^x$ هي تزايدية قطعا على $]\ln 2; +\infty[$ و منه هي تزايدية قطعا على $]\ln 4; +\infty[$ (لأن $]\ln 4; +\infty[\subset]\ln 2; +\infty[$) .
- الدالة h هي تزايدية قطعا على $]\ln 4; +\infty[$ لأنها مركبة دالتين تزايديتين قطعا .
- وبالتالي الدالة h هي متصلة و تزايدية قطعا على $]\ln 4; +\infty[$ إذن h تقبل دالة عكسية h^{-1} من $J = h(]\ln 4; +\infty[)$ إلى $]\ln 4; +\infty[$.

خلاصة : h تقبل دالة عكسية h^{-1} من $J = h(]\ln 4; +\infty[)$ إلى $]\ln 4; +\infty[$.

نحدد J

لدينا :

$$\lim_{x \rightarrow (\ln 4)^+} f(x) - (2x - 2) = 0^+ \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow (\ln 4)^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow (\ln 4)^+} \ln(f(x) - (2x - 2)) = -\infty$$

. $]\ln 4; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(e^{2x} - 4e^x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln e^x (e^x - 4) = +\infty$$

$$h(]\ln 4; +\infty[) = \left[\lim_{x \rightarrow (\ln 4)^+} h(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) \right[= \mathbb{R}$$

خلاصة : الدالة h تقبل دالة عكسية h^{-1} معرفة على $\mathbb{R}$.

ب- نتحقق أن : $h(\ln 5) = \ln 5$ ثم نحدد $(h^{-1})'$.

$$h(\ln 5) = \ln(e^{2\ln 5} - 4e^{\ln 5}) = \ln(e^{\ln 25} - 4 \times 5) = \ln(25 - 20) = \ln 5$$

خلاصة : $h(\ln 5) = \ln 5$

$$\text{نحدد } (h^{-1})'(\ln 5)$$

لدينا :

$$h \text{ قابلة للاشتقاق على }]\ln 4; +\infty[\text{ (مركبة دالتين قابلتين للاشتقاق) و منه } h \text{ قابلة للاشتقاق في } \ln 5 \text{ (لأن}$$

$$\ln 5 \in]\ln 4; +\infty[$$

$$\text{نبين أن : } h'(\ln 5) \neq 0 \text{ (أي } h' \text{ لا تنعدم في } \ln 5)$$

$$h'(x) = \left(\ln(e^{2x} - 4e^x) \right)' = \frac{(e^{2x} - 4e^x)'}{e^{2x} - 4e^x} = \frac{2e^{2x} - 4e^x}{e^{2x} - 4e^x} = \frac{2e^x(e^x - 2)}{e^x(e^x - 4)} = \frac{2(e^x - 2)}{e^x - 4}$$

$$\text{ومنه : } h'(\ln 5) \neq 0 \text{ وبالتالي } h'(\ln 5) = \frac{2(e^{\ln 5} - 2)}{e^{\ln 5} - 4} = \frac{2(5 - 2)}{5 - 4} = 6$$

• إذن الدالة العكسية h^{-1} قابلة للاشتقاق في $h(\ln 5)$ مع $(h^{-1})'(h(x_0)) = \frac{1}{h'(x_0)}$ نأخذ : $x_0 = \ln 5$

$$(h^{-1})'(\ln 5) = \frac{1}{6} \text{ خلاصة : } (h^{-1})'(h(\ln 5)) = \frac{1}{h'(\ln 5)} = \frac{1}{6} \text{ ومنه :}$$

انتهى