

$$(D) : \begin{cases} x = 6\theta + 1 \\ y = -3\theta + 1 ; (\theta \in \mathbb{R}) \\ z = 6\theta + 1 \end{cases} \quad \text{يعني :}$$

$$(D) : \begin{cases} x = 2(3\theta) + 1 \\ y = -(3\theta) + 1 ; (\theta \in \mathbb{R}) \\ z = 2(3\theta) + 1 \end{cases} \quad \text{يعني :}$$

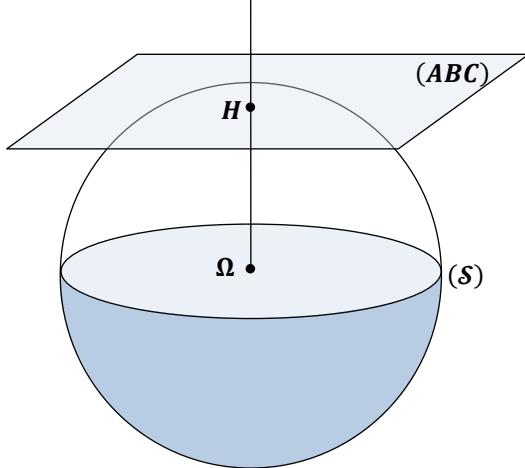
$$(D) : \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -t + 1 ; (t \in \mathbb{R}) \\ z = 2t + 1 \end{cases} \quad \text{نصل على : } 3\theta = t \quad \text{نصل على :}$$

و هذه الكتابة الأخيرة عبارة عن تمثيل بارامטרי لمستقيم (D) .



في هذا السؤال سوف نستعمل تمثيل بارامטרי لمستقيم (D) و المعادلة الديكارتية للمستوى (ABC) . و نستعين بالشكل التالي :

(D)



بما أن المستوى (ABC) مماس لـ (S) في H . فإن :

(1) و نعلم أن: $(D) \perp (ABC)$ (2) $(D) \perp (ABC)$

إذن من (1) و (2) نستنتج أن : $(\Omega H) \parallel (D)$

و بما أن : Ω نقطة مشتركة بين المستقيمين (ΩH) و (D) . فإن المستقيمان (D) و (ΩH) منطبقان. يعني :

$$\begin{cases} H \in (D) \\ H \in (ABC) \end{cases} \quad \text{حصلنا إذن على ما يلي :}$$

$$(D) : \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -t + 1 ; (t \in \mathbb{R}) \\ z = 2t + 1 \end{cases} \quad \text{و لدينا :}$$

$$\begin{cases} H(\alpha, \beta, \gamma) \\ (ABC) : 2x - y + 2z + 6 = 0 \end{cases} \quad \text{و لدينا كذلك :}$$

بما أن $H(\alpha, \beta, \gamma)$ نقطة مشتركة بين المستقيم (D) و المستوى (ABC) .

فإن المثلث (α, β, γ) يحقق كلاً من التمثيل البارامטרי لمستقيم (D) و المعادلة الديكارتية للمستوى (ABC) .

$$(\exists t \in \mathbb{R}) : \begin{cases} \alpha = 2t + 1 \\ \beta = -t + 1 \\ \gamma = 2t + 1 \\ 2\alpha - \beta + 2\gamma + 6 = 0 \end{cases} \quad \text{إذن :}$$

نعرض قيم α و β و γ في المعادلة الأخيرة نحصل على :

$$2(2t + 1) - (-t + 1) + 2(2t + 1) + 6 = 0 \quad \text{يعني : } t = -1 \quad \text{إذن : } 4t + t + 4t + 9 = 0$$

أجوبة امتحان الدورة الإستدراكية 2012

التمرين الأول :



$$\begin{cases} \overrightarrow{AB}(3, 0, -3) \\ \overrightarrow{AC}(3, 2, -2) \end{cases} \quad \text{إذن : } \begin{cases} A(-3, 0, 0) \\ B(0, 0, -3) \\ C(0.2, -2) \end{cases} \quad \text{لدينا :}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} &= \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \vec{k} \\ &= 6\vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{k} \end{aligned} \quad \text{و منه :}$$

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (6\vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{k})$$

و نعلم أن المتجهة $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ منتظمة على (ABC) . لتكن $M(x, y, z)$ نقطة من المستوى (ABC) .

بما أن المتجهة $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ منتظمة على المستوى (ABC) . فإن المتجهان $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ و \overrightarrow{AM} متعامدان.

$$\overrightarrow{AM} \cdot (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) = \vec{0} \quad \text{يعني :}$$

$$\begin{pmatrix} x+3 \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{يعني :}$$

$$6(x+3) - 3y + 6z = 0 \quad \text{يعني :}$$

$$2x - y + 2z + 6 = 0 \quad \text{يعني :}$$

و هذه الكتابة الأخيرة هي معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) .



$$\begin{cases} (ABC) : 2x - y + 2z + 6 = 0 \\ \Omega(1, 1, 1) \end{cases} \quad \text{لدينا :}$$

$$d(\Omega, (ABC)) = \frac{|2 \times 1 - 1 + 2 \times 1 + 6|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{9}{\sqrt{9}} = 3 \quad \text{إذن :}$$

$$d(\Omega, (ABC)) = 3 = \text{Rayon}(\mathcal{S})$$

إذن : المستوى (ABC) مماس للفلكة (\mathcal{S}) في نقطة (α, β, γ) .



لتكن $(D) \perp (ABC)$ نقطة من المستقيم (D) . لدينا $\Omega \in (D)$

بما أن المتجهة $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ منتظمة على المستوى (ABC) . فإن المتجهان $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{\Omega M}$ مستقيمان.

$$(\exists \theta \in \mathbb{R}) ; \overrightarrow{\Omega M} = \theta(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \quad \text{يعني :}$$

$$(\exists \theta \in \mathbb{R}) ; \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix} = \theta \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \text{يعني :}$$



$$(D) : \begin{cases} x-1 = 6\theta \\ y-1 = -3\theta ; (\theta \in \mathbb{R}) \\ z-1 = 6\theta \end{cases} \quad \text{يعني :}$$

2 ج

يكفي أن نبرهن على أن : $aff(C) = -i aff(A) + 5i + 9$

لدينا حسب المعطيات : $aff(A) = a = (2 - i)$

$$\begin{aligned} -i aff(A) + 5i + 9 &= -i(2 - i) + 5i + 9 \\ &= -2i - 1 + 5i + 9 = 3i + 8 = aff(C) \end{aligned}$$

حصلنا إذن على : $-i aff(A) + 5i + 9 = aff(C)$

إذن حسب الكتابة العقدية للدوران $\mathcal{R}(A) = C$ نستنتج أن :

التمرين الثالث :

1

نعتبر العبارة (P_n) التالية : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n > 1$ من أجل $n = 0$ لدينا $u_0 = 3 > 1$. إذن العبارة (P_0) صحيحة.

ليكن $n \in \mathbb{N}$ نفترض أن : $u_n > 1$

نحتاج إلى أن نبرهن على أن : $u_{n+1} > 1$

و عادة ما ننطلق من $u_{n+1} > 1$ لكي نحدد العبارة التي ستنطلق منها باستعمال المسار العكسي و هو ما سوف أعرضه الآن :

$$\frac{4u_n + 3}{3u_n + 4} > 1 \quad \text{نحتاج إلى :}$$

$$\frac{4u_n + 3}{3u_n + 4} > 1 \quad \text{يعني نحتاج إلى :}$$

$$4u_n + 3 > 3u_n + 4 \quad \text{يعني نحتاج إلى :}$$

$$u_n > 1 \quad \text{يعني نحتاج إلى :}$$

و هذه المتفاوتة متوفرة لدينا حسب الإفتراض

إذن تمكنا من إيجاد المسار العكسي للبرهان .

و البرهان الذي يجب كتابته على ورقة التحرير هو التالي :

$$u_n > 1 \quad \text{لدينا حسب الافتراض :}$$

$$4u_n + 3 > 3u_n + 4 \quad \text{إذن :}$$

$$u_{n+1} > 1 \quad \text{يعني :} \quad \frac{4u_n + 3}{3u_n + 4} > 1 \quad \text{أي أن العبارة } (P_{n+1}) \text{ صحيحة .}$$

(P_0) est vraie

$(P_n) \Rightarrow (P_{n+1}) ; (\forall n \in \mathbb{N})$ خلاصة : حصلنا على النتائج التالية :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n > 1 \quad \text{إذن حسب مبدأ الترجع :}$$

$$1 - v_n = 1 - \frac{u_n - 1}{u_n + 1} \quad \text{ليكن : } (n \in \mathbb{N}) . \quad \text{لدينا :}$$

$$= \frac{u_n + 1}{u_n + 1} - \frac{u_n - 1}{u_n + 1} = \frac{2}{u_n + 1}$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; 1 - v_n = \frac{2}{u_n + 1} \quad \text{إذن :}$$

و نعلم حسب السؤال (1) أن : $1 - v_n > 1$

$(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n + 1 > 2 > 0$

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; \frac{1}{u_n + 1} > 0 \quad \text{يعني :}$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; \frac{2}{u_n + 1} > 0 \quad \text{يعني :}$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; 1 - v_n > 0 \quad \text{يعني :}$$

نعرض t بقيمتها 1 - في المعادلات الثلاث الأولى نحصل على :

$$\begin{cases} \alpha = 2(-1) + 1 = -1 \\ \beta = -(-1) + 1 = 2 \\ \gamma = 2(-1) + 1 = -1 \end{cases}$$



و بالتالي : $H(-1, 2, -1)$ هي نقطة تمسك المستوى (ABC) و الفلكة (\mathcal{S})

التمرين الثاني :

1 أ

$$\frac{c - a}{b - a} = \frac{(8 + 3i) - (2 - i)}{(6 - 7i) - (2 - i)} = \frac{6 + 4i}{4 - 6i} = \frac{3 + 2i}{2 - 3i} \quad \text{لدينا :}$$

$$= \frac{(3 + 2i)(2 + 3i)}{(2 - 3i)(2 + 3i)} = \frac{6 + 13i - 6}{2^2 - (3i)^2} = \frac{13i}{4 + 9} = \frac{13i}{13} = i$$

$$(*) \quad \frac{c - a}{b - a} = i \quad \text{و بالتالي :}$$

$$\begin{cases} \left| \frac{c - a}{b - a} \right| = |i| \\ \arg \left(\frac{c - a}{b - a} \right) \equiv \arg(i) [2\pi] \end{cases} \quad \text{لدينا :} \quad \frac{c - a}{b - a} = i \quad \text{إذن :}$$

$$\begin{cases} |c - a| = |b - a| \\ (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases} \quad \text{يعني :} \quad \begin{cases} \left| \frac{c - a}{b - a} \right| = 1 \\ \arg \left(\frac{c - a}{b - a} \right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases} \quad \text{يعني :}$$

$$\begin{cases} AC = AB \\ (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases} \quad \text{يعني :}$$

و بالتالي ABC مثلث متساوي الساقين و قائم الزاوية في نفس النقطة A .

1 ب

$$aff(\Omega) = \frac{aff(B) + aff(C)}{2} \quad \text{لدينا } \Omega \text{ منتصف القطعة } [BC] . \quad \text{إذن :}$$

$$aff(\Omega) = \frac{(6 - 7i) + (8 + 3i)}{2} = (7 - 2i) = \omega \quad \text{يعني :}$$

$$\mathcal{R}_\Omega \left(\frac{-\pi}{2} \right) : \begin{cases} (\mathcal{P}) \mapsto (\mathcal{P}) \\ M(z) \mapsto M'(z') \end{cases} \quad \text{لدينا } \mathcal{R} \text{ دوران معرف بما يلي :}$$

$$\mathcal{R}(M) = M' \quad \text{و ننطلق من الكتابة التالية :}$$

$$\Leftrightarrow (z' - \omega) = e^{\frac{-i\pi}{2}}(z - \omega)$$

$$\Leftrightarrow z' - (7 - 2i) = \left(\cos \left(\frac{-\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{-\pi}{2} \right) \right) (z - 7 + 2i)$$

$$\Leftrightarrow z' - (7 - 2i) = (-i)(z - 7 + 2i)$$

$$\Leftrightarrow z' = -iz + 7i + 2 + 7 - 2i$$

$$\Leftrightarrow z' = -iz + 5i + 9$$

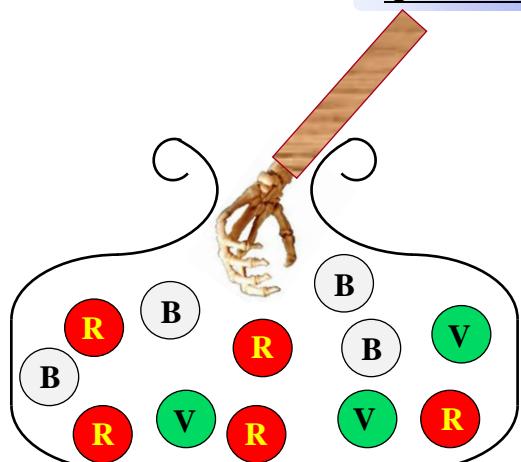
و هذه الكتابة الأخيرة تُعبّر عن الكتابة العقدية للدوران \mathcal{R} .

و بذلك يصبح الدوران \mathcal{R} معرف بما يلي :

$$\mathcal{R}_\Omega \left(\frac{-\pi}{2} \right) : \begin{cases} (\mathcal{P}) \mapsto (\mathcal{P}) \\ M(z) \mapsto M'(-iz + 5i + 9) \end{cases}$$



التمرين الرابع :



عندما نسحب عشوائياً و في آن واحد ثلاثة كرات من كيس يحتوي على 12 كرة فإن التجربة تتحمّل C_{12}^3 نتيجة ممكنة .

يعني : $card(\Omega) = C_{12}^3 = 220$. بحيث Ω هو كون إمكانيات هذه التجربة العشوائية .

1

$$p\left(\text{الحصول على ثلاثة حمراء}\right) = \frac{card\left(\text{الحصول على ثلاثة حمراء}\right)}{card(\Omega)} = \frac{C_5^3}{220} = \frac{10}{220} = \frac{1}{22}$$

2

$$p\left(\text{الحصول على نفس اللون}\right) = p\left(\text{الحصول على ثلاثة كرات حمراء}\right) + p\left(\text{الحصول على ثلاثة كرات بيضاء}\right) + p\left(\text{الحصول على ثلاثة كرات خضراء}\right)$$

$$= \frac{card(\text{ثلاثة كرات حمراء})}{card(\Omega)} + \frac{card(\text{ثلاثة كرات بيضاء})}{card(\Omega)} + \frac{card(\text{ثلاثة كرات خضراء})}{card(\Omega)} \\ = \frac{C_5^3}{220} + \frac{C_4^3}{220} + \frac{C_3^3}{220} = \frac{10}{220} + \frac{4}{220} + \frac{1}{220} = \frac{15}{220} = \frac{3}{44}$$

3

للإجابة على هذا السؤال أقترح طريقتين :
الطريقة الأولى :

$$p\left(\text{الحصول على كرتين حمراوين}\right) = p\left(\text{الحصول على كرتين حمراوين}\right) + p\left(\text{الحصول على كرتين تختلفان}\right)$$

$$= p\left(\text{كرة حمراء}\right) + p\left(\text{كرة حمراء}\right) + p\left(\text{كرة حمراء}\right)$$

$$= \frac{C_5^1 \times C_7^2}{card(\Omega)} + \frac{C_5^2 \times C_7^1}{card(\Omega)} + \frac{C_5^3 \times C_7^0}{card(\Omega)}$$

$$= \frac{5 \times 21}{220} + \frac{10 \times 7}{220} + \frac{10}{220} = \frac{185}{220} = \frac{37}{44}$$



ل يكن $n \in \mathbb{N}$. لدينا حسب السؤال (أ) : $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$

إذن : $v_n(u_n + 1) = u_n - 1$

يعني : $v_n u_n + v_n = u_n - 1$

أي : $v_n u_n - u_n = -1 - v_n$

يعني : $u_n(v_n - 1) = -1 - v_n$

أي : $u_n = \frac{1 + v_n}{1 - v_n}$: $u_n = \frac{-1 - v_n}{v_n - 1}$

و بالتالي : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n = \frac{1 + v_n}{1 - v_n}$

3

لدينا حسب السؤال (أ) : $1 - v_n = \frac{2}{u_n + 1}$

يعني : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; v_n = 1 - \frac{2}{u_n + 1}$

$$\begin{aligned} (\forall n \in \mathbb{N}) ; v_{n+1} &= 1 - \frac{2}{u_{n+1} + 1} \\ &= 1 - \frac{2}{\left(\frac{4u_n + 3}{3u_n + 4} + 1\right)} = 1 - \frac{2}{\left(\frac{7u_n + 7}{3u_n + 4}\right)} \\ &= 1 - \frac{2(3u_n + 4)}{7u_n + 7} = \frac{7u_n + 7 - 6u_n - 8}{7u_n + 7} \\ &= \frac{(u_n - 1)}{7(u_n + 1)} = \frac{1}{7} v_n \end{aligned}$$

و بالتالي : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; v_{n+1} = \frac{1}{7} v_n$

يعني : $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متالية هندسية أساسها $\frac{1}{7}$.

إذن الحد العام v_n يكتب على الشكل التالي :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; v_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{7}\right)^{n-0} v_0 \quad \text{إذن : } v_0 = \frac{u_0 - 1}{u_0 + 1} = \frac{3 - 1}{3 + 1} = \frac{1}{2}$$

3

نلاحظ أن $\left(\frac{1}{7}\right)^n$ متالية هندسية أساسها $\frac{1}{7}$ و هو عدد حقيقي موجب و أصغر من 1

إذن : $\lim_{n \infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{7}\right)^n = 0$ و منه : $\lim_{n \infty} \left(\frac{1}{7}\right)^n = 0$

يعني : $\lim_{n \infty} (v_n) = 0$

و لدينا حسب السؤال (أ) : $1 - v_n = \frac{2}{u_n + 1}$

يعني : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n + 1 = \frac{2}{1 - v_n}$

يعني : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n = \frac{2}{1 - v_n} - 1$

و بالتالي : $\lim_{n \infty} (u_n) = \lim_{n \infty} \left(\frac{2}{1 - v_n} - 1\right) = \frac{2}{1 - 0} - 1 = 1$

يعني : $\lim_{n \infty} (u_n) = 1$

$$\text{إذن: } (\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) = 1 + \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2}$$

من أجل $x = 0$ نحصل على :

$$f'(0) = 1 + \frac{2e^0}{(e^0 + 1)^2} = 1 + \frac{2}{2^2} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\text{لدينا: } (\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) = 1 + \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2}$$

نعلم أن: $e^x > 0$

$$\text{إذن: } (\forall x \in \mathbb{R}) ; 2e^x > 0 \text{ و } (e^2 + 1)^2 > 0$$

$$\text{و منه: } (\forall x \in \mathbb{R}) ; 1 + \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2} > 0$$

$$\text{يعني: } (\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) > 0$$

إذن f دالة تزايدية قطعا على \mathbb{R} .



● 3 ج ●

نعلم أن معادلة المماس (T) للمنحنى (\mathcal{C}) في النقطة x_0 تكتب على الشكل:

$$(T) : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$\text{إذن من أجل } x_0 = 0 \text{ نجد: } (T) : y = f'(0)x + f(0)$$

$$\text{يعني: } (T) : y = f'(0)x + f(0)$$

$$\text{ولدينا: } f'(0) = \frac{3}{2} \text{ و } f(0) = 0$$

$$(T) : y = \frac{3}{2}x \text{ إذن المعادلة الديكارتية للمماس (T) تصبح:}$$

● 4 أ ●

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + 1 - \frac{2}{e^x + 1} \right) = \left(+\infty + 1 - \frac{2}{+\infty} \right) = (+\infty + 1 - 0) = +\infty$$

● 4 ب ●

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + 1 - \frac{2}{e^x + 1} - (x + 1) \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-2}{e^x + 1} \right) = \frac{-2}{+\infty} = 0$$

$$\text{إذن: } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x + 1) = 0$$

$$\text{و منه: } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x(e^x + 1)} \right) = 1 + \frac{1}{\infty} - \frac{2}{\infty} = 1 + 0 - 0 = 1$$

$$\text{إذن: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$$



الطريقة الثانية: استعمال تقنية الحدث المضاد.

إذا كان \bar{A} هو الحدث المضاد للحدث A فإن: $p(A) = 1 - p(\bar{A})$

نضع: $\{$ الحصول على كرة واحدة على الأقل $\}$

إذن: $\{$ الحصول على ثلاثة كرات من ألوان تخالف الأحمر $\} = \bar{A}$

$$\begin{aligned} p(\bar{A}) &= p\left(\begin{array}{c} \text{كرتين} \\ \text{خضراوين} \\ \text{و الأخرى} \\ \text{أو بياضاوين} \\ \text{أو الأخرى} \\ \text{ثلاث كرات} \\ \text{خضراء} \\ \text{أو كرات} \\ \text{بيضاء} \\ \text{بيضاء} \end{array}\right) = p\left(\begin{array}{c} \text{كرتين} \\ \text{خضراوين} \\ \text{و الأخرى} \\ \text{أو بياضاوين} \\ \text{أو الأخرى} \\ \text{ثلاث} \\ \text{خضراء} \\ \text{أو كرات} \\ \text{بيضاء} \\ \text{بيضاء} \end{array}\right) \\ &= p\left(\begin{array}{c} \text{ثلاث} \\ \text{كرات} \\ \text{بيضاء} \end{array}\right) + p\left(\begin{array}{c} \text{ثلاث} \\ \text{كرات} \\ \text{خضراء} \end{array}\right) + p\left(\begin{array}{c} \text{كرتين} \\ \text{خضراوين} \\ \text{و الأخرى} \\ \text{أو بياضاوين} \end{array}\right) + p\left(\begin{array}{c} \text{كرتين} \\ \text{خضراوين} \\ \text{و الأخرى} \\ \text{أو بياضاوين} \end{array}\right) \\ &= \frac{C_4^3}{220} + \frac{C_3^3}{220} + \frac{C_4^2 \times C_3^1}{220} + \frac{C_3^2 \times C_4^1}{220} \\ &= \frac{4}{220} + \frac{1}{220} + \frac{18}{220} + \frac{12}{220} = \frac{35}{220} = \frac{7}{44} \end{aligned}$$

$$\text{إذن: } p(A) = 1 - p(\bar{A})$$

$$p(A) = 1 - \frac{7}{44} = \frac{44 - 7}{44} = \frac{37}{44} \text{ يعني:}$$

و وبالتالي: احتمال الحصول على كرة حمراء واحدة على الأقل هو: $\frac{37}{44}$

التمرين الخامس: ● 1 ●

$$\text{ليكن } x \text{ عنصرا من } \mathbb{R} \text{ . لدينا: } f(x) = x + \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$$

$$\begin{aligned} f(-x) &= -x + \frac{e^{-x} - 1}{e^{-x} + 1} = -x + \frac{e^{-x}(1 - e^x)}{e^{-x}(1 + e^x)} \\ &= -x + \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^x} = -\left(x + \frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right) = -f(x) \end{aligned}$$

$$\text{إذن: } (\forall x \in \mathbb{R}) ; f(-x) = -f(x)$$

و هذا يعني أن الدالة f دالة فردية و تمثيلها البياني متماض بالنسبة للنقطة 0 أصل المعلم.

● 2 ●

$$\begin{aligned} x + 1 - \frac{2}{e^x + 1} &= x + \frac{e^x + 1}{e^x + 1} - \frac{2}{e^x + 1} \\ &= x + \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = f(x) \end{aligned}$$

$$\text{إذن: } (\forall x \in \mathbb{R}) ; f(x) = x + 1 - \frac{2}{e^x + 1}$$

● 3 أ ●

$$\text{لدينا: } (\forall x \in \mathbb{R}) ; f(x) = x + 1 - \frac{2}{e^x + 1}$$

$$\begin{aligned} (\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) &= 1 - \left(\frac{2}{e^x + 1} \right) \\ &= 1 - \left(\frac{-2e^x}{(e^x + 1)^2} \right) = 1 + \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2} \end{aligned}$$



أ 6

$$H'(x) = (x - \ln(e^x + 1))' \quad \text{لدينا:}$$

$$= 1 - \frac{e^x}{e^x + 1} = \frac{e^x + 1 - e^x}{e^x + 1} = \frac{1}{e^x + 1} = h(x)$$

إذن H دالة أصلية للدالة h على \mathbb{R} .



$$\int_0^{\ln 2} \left(\frac{1}{e^x + 1} \right) dx = \int_0^{\ln 2} h(x) dx = [H(x)]_0^{\ln 2}$$

$$= [x - \ln(e^x + 1)]_0^{\ln 2} = (\ln 2 - \ln 3) - (0 - \ln 2)$$

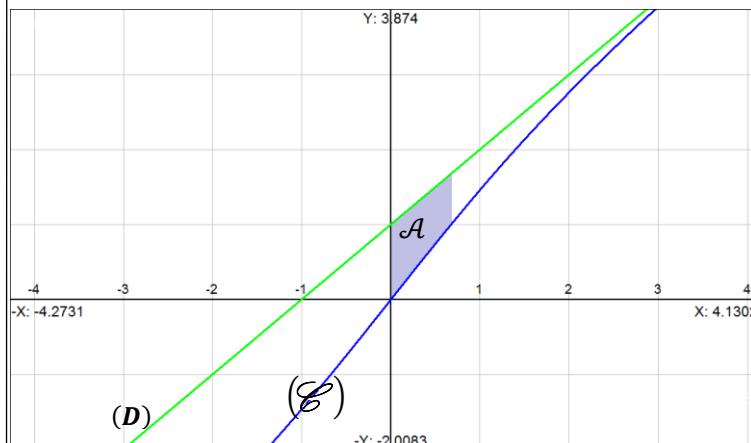
$$= 2 \ln 2 - \ln 3 = \ln 4 - \ln 3 = \ln \left(\frac{4}{3} \right)$$



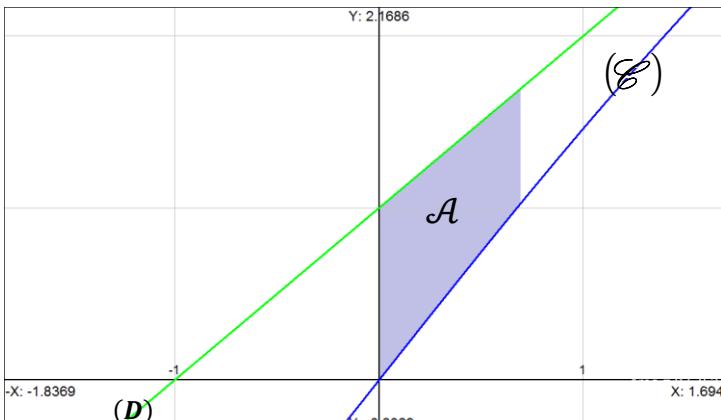
لتكن \mathcal{A} مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى (\mathcal{C}) والمستقيم (D) و المستقيمين $x = 0$ و $x = \ln 2$. لدينا :

$$\mathcal{A} = \int_0^{\ln 2} |f(x) - (x + 1)| dx = \int_0^{\ln 2} \left| \frac{-2}{e^x + 1} \right| dx$$

$$= 2 \int_0^{\ln 2} \left(\frac{1}{e^x + 1} \right) dx = 2 \left(\ln \left(\frac{4}{3} \right) \right) \approx 0,57 \text{ unité}^2$$



صورة أخرى للمساحة \mathcal{A}



لقد حصلنا لحد الآن على النهايات التالية :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - 1x = 1 \end{cases}$$

إذن من هذه النهايات الثلاث نستنتج أن المستقيم (D) بجوار $+\infty$. مقارب مائل للمنحنى (\mathcal{C}) .



لدراسة الوضع النسبي للمنحنى (\mathcal{C}) و المستقيم (D) ندرس إشارة الفرق $f(x) - (x + 1)$.

$$f(x) - (x + 1) = (x + 1) - \frac{2}{e^x + 1} - (x + 1) \quad \text{لدينا:}$$

$$= \frac{-2}{e^x + 1}$$



و نعلم أن : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; e^x > 0$

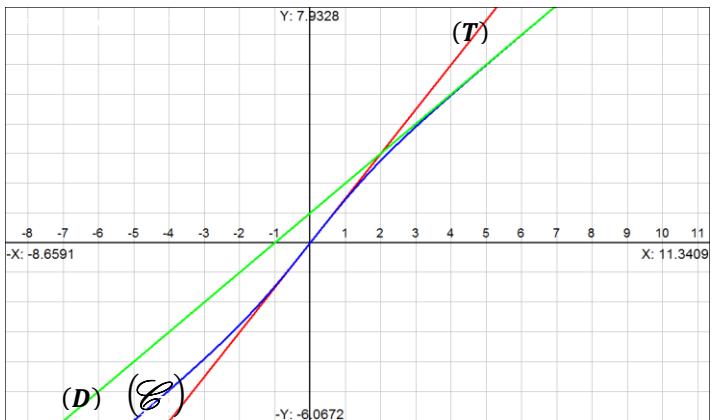
إذن : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; e^x + 1 > 0$

يعني : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; \frac{-2}{e^x + 1} < 0$

يعني : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f(x) - (x + 1) < 0$

يعني : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f(x) < (x + 1)$

و بالتالي : المستقيم (D) يوجد فوق المنحنى (\mathcal{C})



المنحنى (\mathcal{C}) لوحده

