

أجوبة امتحان الدورة العادية 2011

التمرين الأول:

1 أ

لنحل في \mathbb{R} المعادلة : $x^2 + 4x - 5 = 0$.

لدينا : $\Delta = 4^2 - 4(-5) = 16 + 20 = 36$

إذن : المعادلة تقبل حلين حقيقيين x_1 و x_2 معرفين بما يلي :

$$x_1 = \frac{-4 - 6}{2} = -5 \quad \text{و} \quad x_2 = \frac{-4 + 6}{2} = 1$$

1 ب

لنحل في $]0; +\infty[$ المعادلة : $\ln(x^2 + 5) = \ln(x + 2) + \ln(2x)$

نستعمل قواعد الدالة \ln نجد : $\ln(x^2 + 5) = \ln(2x(x + 2))$

يعني : $\ln(x^2 + 5) = \ln(2x^2 + 4x)$

أي : $e^{\ln(x^2 + 5)} = e^{\ln(2x^2 + 4x)}$

يعني : $x^2 + 5 = 2x^2 + 4x$

ومن : $x^2 + 4x - 5 = 0$

و هذه المعادلة تقبل في \mathbb{R} الحلين -5 و 1 .

بما أن : $1 \in]0; +\infty[$ و $-5 \notin]0; +\infty[$.

فإن المعادلة : $\ln(x^2 + 5) = \ln(x + 2) + \ln(2x)$ تقبل حلا وحيدا في $]0; +\infty[$ و هو 1 .

2

لنحل في $]0; +\infty[$ المتراجحة $\ln x + \ln(x + 1) \geq \ln(x^2 + 1)$

هذه المتراجحة تصبح : $\ln(x^2 + x) \geq \ln(x^2 + 1)$

بما أن الدالة \ln تقابل من \mathbb{R}_+^* نحو \mathbb{R} فإن المتراجحة تصبح :

$$x^2 + x \geq x^2 + 1$$

يعني : $x \geq 1$

و بالتالي : مجموعة حلول المتراجحة هي جميع الأعداد الحقيقية الأكبر من

أو تساوي 1 . أو بتعبير آخر : $\mathcal{S} = [1; +\infty[$

التمرين الثاني:

1

نعتبر العبارة (P_n) المعرفة بما يلي : $(P_n) : (\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n > 0$

لدينا : $1 > 0$ إذن : $u_0 = 1 > 0$

و هذا يعني أن العبارة (P_0) صحيحة .

نفترض أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n > 0$

إذن : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 5 + 8u_n > 5 > 0$

و هذا يعني أن الكميتين u_n و $(5 + 8u_n)$ موجبتين قطعا .

إذن كمية موجبة قطعا . $\frac{u_n}{5 + 8u_n}$

أي : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; \frac{u_n}{5 + 8u_n} > 0$

يعني : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} > 0$

إذن : العبارة (P_{n+1}) صحيحة .

حصلنا إذن على النتائج التالية : $\{(P_0) \text{ est vraie} \}$
 $\{(P_n) \Rightarrow (P_{n+1}) ; (\forall n \in \mathbb{N})\}$

إذن حسب مبدأ التراجع : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n > 0$

ليكن n عنصرا من \mathbb{N} . لدينا : $v_n = \frac{1}{u_n} + 2$

$$v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}} + 2 = \frac{1}{\left(\frac{u_n}{5 + 8u_n}\right)} + 2 = \frac{5 + 8u_n}{u_n} + 2$$

$$= \frac{5 + 10u_n}{u_n} = \frac{5}{u_n} + 10 = 5\left(\frac{1}{u_n} + 2\right) = 5v_n$$

إذن : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; v_{n+1} = 5v_n$

و هذا يعني أن المتتالية $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ هندسية و أساسها هو العدد 5 .

و منه فإن الحد العام v_n لهذه المتتالية يُكتب على الشكل :

$$v_n = v_0 5^{n-0} = \left(\frac{1}{u_0} + 2\right) 5^n = \left(\frac{1}{1} + 2\right) 5^n = 3 \times 5^n$$

إذن : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; v_n = 3 \times 5^n$

نعلم أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; v_n = \frac{1}{u_n} + 2$

إذن : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; v_n - 2 = \frac{1}{u_n}$

يعني : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n = \frac{1}{v_n - 2}$

إذن : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n = \frac{1}{3 \times 5^n - 2}$

نلاحظ أن التعبير 5^n عبارة عن متتالية هندسية أساسها 5 و هو عدد حقيقي أكبر من 1

إذن : $\lim_{n \rightarrow \infty} 5^n = +\infty$

و منه : $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3 \times 5^n - 2}\right) = \frac{1}{+\infty} = 0$

إذن : $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$

التمرين الثالث:

1

لنحل في \mathbb{C} المعادلة : $z^2 - 18z + 82 = 0$

لدينا : $\Delta = (-18)^2 - 4 \times 82 = -4 = (2i)^2$

إذن المعادلة تقبل حلين عقديين z_1 و z_2 معرفين بما يلي :

$$z_1 = \frac{18 - 2i}{2} = 9 - i \quad \text{و} \quad z_2 = \frac{18 + 2i}{2} = 9 + i$$

2 أ

$$\frac{c - b}{a - b} = \frac{(11 - i) - (9 - i)}{(9 + i) - (9 - i)} = \frac{2}{2i} = \frac{1}{i} = \frac{1 \times i}{i \times i} = -i$$

إذن : $\frac{c - b}{a - b} = -i$

$$\left\{ \begin{array}{l} \arg\left(\frac{c - b}{a - b}\right) \equiv \arg(-i) [2\pi] \\ \left|\frac{c - b}{a - b}\right| = |-i| \end{array} \right.$$

و من هذه الكتابة الأخيرة نحصل على :

$$\left\{ \begin{array}{l} \arg\left(\frac{c - b}{a - b}\right) \equiv \frac{-\pi}{2} [2\pi] \\ \left|\frac{c - b}{a - b}\right| = 1 \end{array} \right.$$

يعني :

التمرين الرابع:

ليكن x عنصرا من \mathbb{R} . لدينا: $g(x) = (1-x)e^x - 1$

إذن: $g'(x) = -e^x + (1-x)e^x = -xe^x$

إذن: $(\forall x \in \mathbb{R}) ; g'(x) = -xe^x$

إذا كان $x \in [0, +\infty[$ فإن: $-xe^x \leq 0$

ومنه: $\forall x \in [0, +\infty[; g'(x) \leq 0$

و هذا يعني أن الدالة g تناقصية على $[0, +\infty[$.

إذا كان $x \in]-\infty; 0]$ فإن: $-xe^x \geq 0$

ومنه: $\forall x \in [0, +\infty[; g'(x) \geq 0$

و هذا يعني أن الدالة g تزايدية على $] -\infty; 0]$.

ولدينا: $g(0) = (1-0)e^0 - 1 = 0$

ليكن x عنصرا من \mathbb{R} . نفصل بين حالتين:

الحالة الأولى: إذا كان: $x \geq 0$

فإن: $g(x) \leq g(0)$ لأن g تناقصية على $[0, +\infty[$.

ومنه: $(\forall x \geq 0) ; g(x) \leq 0$

الحالة الثانية: إذا كان: $x \leq 0$

فإن: $g(x) \leq g(0)$ لأن g تزايدية على $] -\infty; 0]$.

ومنه: $(\forall x \leq 0) ; g(x) \leq 0$

نلاحظ في كلتا الحالتين أن: $g(x) \leq 0$

إذن: $(\forall x \in \mathbb{R}) ; g(x) \leq 0$

لدينا: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2-x)e^x - x = (2-\infty)e^{+\infty} - \infty$

$= (-\infty)(+\infty) - \infty = -\infty - \infty = -\infty$

إذن: $(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

لدينا: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{x} - 1 \right) e^x - 1$

$= \left(\frac{2}{x} - 1 \right) e^{+\infty} - 1 = (0-1)(+\infty) - 1$

$= (-1)(+\infty) - 1 = -\infty - 1 = -\infty$

إذن: $(2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$

نستنتج إذن من النتيجة (1) و (2) أن المنحنى (\mathcal{C}) يقبل فرعاً شلجيمياً في اتجاه محور الأرتياب بجوار $+\infty$.

لدينا: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2-x)e^x - x$

$= \lim_{x \rightarrow -\infty} (2e^x - xe^x - x)$

$= 2 \times 0 - 0 - (-\infty) = 0 + \infty = +\infty$

أي: $\left\{ \begin{array}{l} (\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC}) \equiv \frac{-\pi}{2} [2\pi] \\ BC = BA \end{array} \right.$ أي: $\left\{ \begin{array}{l} (\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC}) \equiv \frac{-\pi}{2} [2\pi] \\ |c-b| = |a-b| \end{array} \right.$

و من هذه الكتابة الأخيرة نستنتج أن ABC مثلث قائم الزاوية و متساوي الساقين في نفس النقطة B .

ملاحظة: إذا كان $(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ نقول أن ABC مثلث قائم الزاوية مباشر.

و إذا كان $(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC}) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$ نقول أن ABC مثلث قائم الزاوية غير مباشر.

لدينا: $|4(1-i)| = 4\sqrt{1^2 + (-1)^2} = 4\sqrt{2}$

إذن: $4(1-i) = 4\sqrt{2}e^{i\theta}$

لنبحث الآن عن العمدة θ .

و من أجل ذلك نتطرق من: $4(1-i) = 4\sqrt{2} \cos \theta + i 4\sqrt{2} \sin \theta$

يعني: $\begin{cases} 4 = 4\sqrt{2} \cos \theta \\ -4 = 4\sqrt{2} \sin \theta \end{cases}$

يعني: $\begin{cases} \cos \theta = \cos \left(\frac{-\pi}{4} \right) \\ \sin \theta = \sin \left(\frac{-\pi}{4} \right) \end{cases}$

يعني: $\begin{cases} \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta = \frac{-\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

إذن: $\theta \equiv \frac{-\pi}{4} [2\pi]$

و بالتالي: $4(1-i) = 4\sqrt{2}e^{\frac{-i\pi}{4}}$

لدينا: $(c-a)(c-b) = (11-i-9-i)(11-i-9+i)$

و منه: $(c-a)(c-b) = 4(1-i)$

يعني: $|c-a)(c-b)| = |4(1-i)|$

يعني: $|c-a| \times |c-b| = 4|1-i|$

إذن: $|c-a| \times |c-b| = 4\sqrt{2}$

يعني: $AC \times BC = 4\sqrt{2}$



لدينا \mathcal{R} دوران معرف بما يلي: $\mathcal{R}_B \left(\frac{3\pi}{2} \right) : (P) \mapsto (P)$

$M(z) \mapsto M'(z')$

ننتقل من المعطى: $\mathcal{R}(M) = M'$

إذن حسب التعريف العقدي للدوران: $(z' - b) = e^{\frac{i3\pi}{2}}(z - b)$

يعني: $(z' - 9 + i) = -i(z - 9 + i)$

يعني: $z' - 9 + i = -iz + 9i + 1$

يعني: $z' = -iz + 8i + 10$

إذن الدوران \mathcal{R} يصبح: $(P) \mapsto (P)$

$M(z) \mapsto M'(-iz + 8i + 10)$

لدينا: $-ic + 8i + 10 = -i(11-i) + 8i + 10$

$= -11i - 1 + 8i + 10 = -3i + 9 = c' = aff(C')$

إذن حسب الكتابة العقدية للدوران \mathcal{R} نستنتج أن: $\mathcal{R}(C) = C'$

و كذلك: $aff(C') = c' = 9 - 3i$

و لدينا كذلك : $f(2) = (2-2)e^2 - 2 = -2 < 0$

إذن : $f(2) < 0$

و لدينا كذلك : $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}e^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}$

بما أن : $e^{\frac{3}{2}} > 3$ فإن : $\frac{1}{2}e^{\frac{3}{2}} > \frac{3}{2}$

و منه : $\frac{1}{2}e^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2} > 0$ أي : $f\left(\frac{3}{2}\right) > 0$

من النتيجة (2) و (3) نستنتج أن : $f(2) \cdot f\left(\frac{3}{2}\right) < 0$ إذن من النتيجة (1) و (4) نستنتج حسب مبرهنة القيم الوسيطة (TVI)

أن : $\exists ! \alpha \in \left]2; \frac{3}{2}\right[; f(\alpha) = 0$

و بالتالي : المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α محصور بين 2 و $\frac{3}{2}$ النقطة ذات الأفصول α هي نقطة تقاطع (\mathcal{C}) و محور الأفصول .

● (5 II أ) ●

المعادلة $f(x) + x = 0$ تصبح : $(2-x)e^x - x + x = 0$

يعني : $(2-x)e^x = 0$

نعلم أن : $e^x \neq 0$; $(\forall x \in \mathbb{R})$

إذن : $2-x = 0$ و منه : $x = 2$

إذن أفصول نقطة تقاطع (\mathcal{C}) و المستقيم (D) ذو المعادلة $y = -x$

هو 2 و أرتوبها هو : $f(2) = -2$

و بالتالي : (\mathcal{C}) و (D) يتقاطعان في النقطة $A(2; -2)$.

● (5 II ب) ●

لدينا : $f(x) + x = (2-x)e^x$; $(\forall x \in \mathbb{R})$

إذن : إشارة $f(x) + x$ تتعلق فقط بإشارة $(2-x)$

و ذلك لأن : $e^x > 0$; $(\forall x \in \mathbb{R})$

إذا كان : $x = 2$ فإن : $f(x) + x = 0$

إذا كان : $x > 2$ فإن : $f(x) + x < 0$

إذا كان : $x < 2$ فإن : $f(x) + x > 0$

● (5 II ج) ●

نستنتج من السؤال ب) أنه :

• إذا كان : $x > 2$ فإن : $f(x) < 0$

• إذا كان : $x < 2$ فإن : $f(x) > 0$

إذن : (\mathcal{C}) يوجد فوق المستقيم (D) على المجال $]-\infty; 2]$.

و (\mathcal{C}) يوجد أسفل (D) على المجال $]2; +\infty[$.

● (6 II أ) ●

لدراسة نقط الإنعطاف ندرس النقط التي تتعدم فيها المشتقة الثانية f'' .

ليكن x عنصرا من \mathbb{R} . و نريد أن نحل المعادلة : $f''(x) = 0$

لدينا : $f''(x) = g'(x) = -xe^x$

إذن المعادلة تصبح : $-xe^x = 0$

نعلم أن : $e^0 \neq 0$; $(\forall x \in \mathbb{R})$

إذن المعادلة تصبح : $x = 0$

و منه : فالمعادلة تقبل حلا وحيدا و هو الصفر .

يعني أن (\mathcal{C}) يقبل نقطة انعطاف واحدة أفصولها 0 .

و أرتوبها هو $f(0) = 2$

أي : $B(0; 2)$ نقطة انعطاف للمنحنى (\mathcal{C})

إذن : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ (3)

و لدينا : $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2-x)e^x$
 $= \lim_{x \rightarrow -\infty} 2e^x - xe^x = 0 - 0 = 0$

إذن : $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + x) = 0$ (4)

● (2 II ب) ●

لدينا : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2}{x} - 1\right)e^x - 1$
 $= \left(\frac{2}{-\infty} - 1\right)e^{-\infty} - 1 = (0 - 1)(0) - 1 = -1$

إذن : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$ (5)

من النهايات (3) و (4) و (5) نستنتج أن المستقيم (D) الذي معادلته $y = -1x + 0$: (D) مقارب مائل للمنحنى (\mathcal{C}) بجوار $-\infty$.

● (3 II أ) ●

ليكن x عنصرا من \mathbb{R} . لدينا : $f(x) = (2-x)e^x - x$

إذن : $f'(x) = -e^x + (2-x)e^x - 1$

$= (-1 + 2 - x)e^x - 1$

$= (1 - x)e^x - 1$

$= g(x)$

إذن : $f'(x) = g(x)$; $(\forall x \in \mathbb{R})$

● (3 II ب) ●

النتيجة $f'(0) = 0$ تعني هندسيا أن المنحنى (\mathcal{C}) يقبل مماسا أفقيا (موازي لمحور الأفصول) بجوار النقطة ذات الأفصول 0 .

● (3 II ج) ●

لدينا : $f'(x) = g(x)$; $(\forall x \in \mathbb{R})$

و نعلم حسب نتيجة السؤال (I) 2 أن : $g(x) \leq 0$; $(\forall x \in \mathbb{R})$

إذن : $f'(x) \leq 0$; $(\forall x \in \mathbb{R})$

و هذا يعني أن الدالة f تناقصية على \mathbb{R} .

و نضع جدول تغيرات f كما يلي :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	-
f	$+\infty$	2	$-\infty$

● (4 II) ●

لدينا f دالة متصلة و تناقصية قطعاً على \mathbb{R} .

إذن f تقابل من \mathbb{R} نحو \mathbb{R} نحو $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

و منه كل عنصر من \mathbb{R} يمتلك سابقاً واحداً من \mathbb{R} بالدالة f .

لدينا : $0 \in \mathbb{R}$ إذن : $\exists ! \alpha \in \mathbb{R} ; f(\alpha) = 0$

يعني أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا في \mathbb{R} و هو العدد α .

و لدينا : f دالة متصلة على المجال $\left[\frac{3}{2}; 2\right]$. (2)

$$\mathcal{A} = \int_{-1}^0 |f(x) + x| dx = \int_{-1}^0 (f(x) + x) dx \quad \text{و منه :}$$



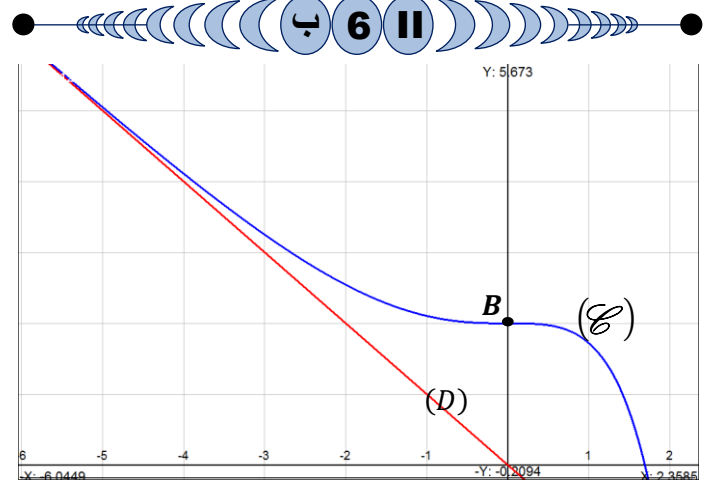
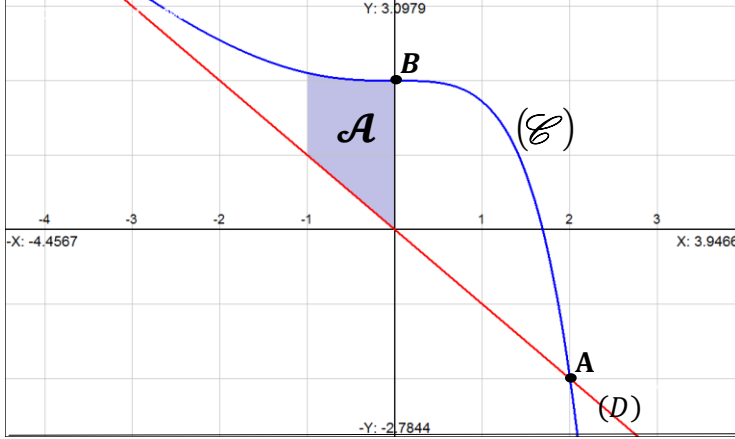
$$= \left(3 - \frac{4}{e}\right) \text{unité}^2$$

$$\mathcal{A} = \left(3 - \frac{4}{e}\right) \text{unité}^2 \quad \text{إذن :}$$

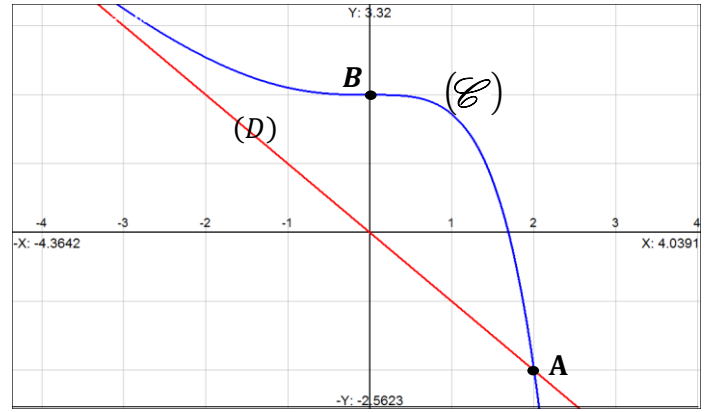
$$\text{بما أن : } \|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2 \text{ cm} \quad \text{فإن : } l' \text{ unité} = 2 \text{ cm}$$

$$\text{إذن : } (l' \text{ unité})^2 = 4 \text{ cm}^2$$

$$\text{و بالتالي : } \mathcal{A} = 4 \left(3 - \frac{4}{e}\right) \text{ cm}^2 = \left(12 - \frac{16}{e}\right) \text{ cm}^2$$



أضفت الصورة الأولى لنرى بوضوح ما يقع بجوار $-\infty$.



II 7 أ

$$\int_{-1}^0 \underbrace{(2-x)}_u \underbrace{e^x}_{v'} dx = [uv]_{-1}^0 - \int_{-1}^0 u'v dx \quad \text{لدينا :}$$

$$= [(2-x)e^x]_{-1}^0 - \int_{-1}^0 -e^x dx$$

$$= [(2-x)e^x]_{-1}^0 + \int_{-1}^0 e^x dx$$

$$= [(2-x)e^x]_{-1}^0 + [e^x]_{-1}^0$$

$$= \left(2 - \frac{3}{2}\right) + \left(1 - \frac{1}{e}\right) = 3 - \frac{4}{e}$$

$$\int_{-1}^0 (2-x) e^x dx = 3 - \frac{4}{e} \quad \text{إذن :}$$



II 7 ب

لتكن \mathcal{A} مساحة الحيز من المستوى المحصور بين المنحنى (C) والمستقيم (D) والمستقيمين اللذين معادلتهما $x = 0$ و $x = -1$.
نعلم أن التكامل يقيس هندسيا طول أو مساحة أو حجم.

$$\mathcal{A} = \int_{-1}^0 |f(x) - (-x)| dx = \int_{-1}^0 |f(x) + x| dx \quad \text{إذن :}$$

من خلال دراسة إشارة $(f(x) + x)$ (حسب II 5 ب)

نكتب : $(\forall x < 2) ; f(x) + x > 0$

إذن : $(\forall x < 2) ; |f(x) + x| = f(x) + x$