

## CALCUL DE PROBABILITES

### I-Expérience aléatoire - Evénement- Univers:

#### 1-Activité :

**expérience 1** : On lance un dé (cube à six faces numérotées de 1 à 6 ) et on note le résultat de la face supérieure.Quel sont les résultats possibles ?

**expérience 2** : On lance une pièce de monnaie 3 fois successives et on note à chaque fois le résultat de la face supérieure.Quels sont les résultats possibles ?

#### 2-Expérience aléatoire-Eventualité-Univers-Evénement :

##### Définitions et exemples

**Expérience aléatoire :** On appelle expérience aléatoire toute expérience dont les résultats possibles sont connus mais on ne peut pas donner le résultat exact avant de la réaliser.

**exemple :** **expérience 1** et **expérience 2**

Les résultats possibles de ces deux expériences aléatoires :

**exemple:** **expérience 1:**  $\{1,2,3,4,5,6\}$

**expérience 2:**  $\{FFF,FFP,FPF,FPP,PPP,PPF,PFP,PFF\}$

**Eventualité-Evénement élémentaire :** Chaque cas possible s'appelle éventualité ou événement élémentaire.

**exemple:** **expérience 1:**  $\{1\}$  est une éventualité

**exemple:** **expérience 2:**  $\{FPF\}$  est une éventualité

**Univers :** les éventualités ( ou les événements élémentaires ) constituent un ensemble qu' on appelle univers.

On le note  $\Omega$

**expérience 1:**  $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

**expérience 2:**  $\Omega = \{FFF,FFP,FPF,FPP,PPP,PPF,PFP,PFF\}$

**Evènement :** toute partie A de  $\Omega$  s'appelle événement .

**expérience 1:**  $A = \{1,4\}$  est un événement.

**expérience 2:**  $B = \{FFP,PPF,PFF\}$  est un événement.

#### 3- Vocabulaire et notation :

- L'événement  $A = \emptyset$  s'appelle **événement impossible** .
- L'événement  $A = \Omega$  s'appelle **événement certain** .
- **L'événement  $A \cap B$**  est l'ensemble constitué par des éventualités réalisées à la fois par les deux événements A et B .  
**expérience1:**  $A = \{1,3,4\}$  et  $B = \{2,3,4,6\}$  alors  $A \cap B = \{3,4\}$
- **L'événement  $A \cup B$**  est l'ensemble constitués par des éventualités réalisées soit par l'événement A ou par l'événement B .

**expérience1:**  $A = \{1,3,4\}$  et  $B = \{2,3,4,6\}$  alors  $A \cup B = \{1,2,3,4,6\}$

- Si  $A \cap B = \emptyset$  on dit que A et B sont deux événements incompatibles .

**expérience1:**  $A = \{1,3,4\}$  et  $B = \{2,6\}$  alors  $A \cap B = \emptyset$

- Si  $A \cap B = \emptyset$  et  $A \cup B = \Omega$  alors B s'appelle l'événement contraire de A on le note  $\bar{B}$  et on a  $A = \bar{B}$  et  $\bar{A} = B$ . On dit que A et B constituent une partition de  $\Omega$

**expérience1:**  $A = \{1,4\}$  l'événement contraire de A est  $\bar{A} = \{2,3,5,6\}$

**expérience2:**  $B = \{\text{FFP}, \text{PPF}, \text{PFF}\}$  l'événement contraire de A est  $\bar{B} = \{\text{FPP}, \text{FPF}, \text{PFP}, \text{FFF}, \text{PPP}\}$

## II- Notion de probabilité :

### 1- Activité :

On lance dans l'air une pièce de monnaie et on marque à chaque fois la face supérieur.

On répète cet expérience 100 fois. Ce tableau donne le nombre de réalisations de chaque face:

face	F	P
Nombres des fois	53	47

1.Déterminer l' événement élémentaire qui a la plus grande chance d être réaliser.

2.Déterminer l' événement élémentaire qui a la plus petite chance d être réaliser.

1.C' est l' événement élémentaire F qui a la plus grande chance d' être réalisé.

On dit que la probabilité de l événement élémentaire F est  $\frac{53}{100}$  on écrit  $p(\{F\}) = \frac{53}{100}$

2.C'est l événement élémentaire P qui a la plus petite chance d être réalisé.

On dit que la probabilité de l événement élémentaire P est  $\frac{47}{100}$  on écrit  $p(\{P\}) = \frac{47}{100}$

### 2- Définition:

Soit  $\Omega = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  univers des éventualités d'une expérience aléatoire .

Lorsque on répète une expérience aléatoire N fois dans les mêmes conditions si  $n_i$  est le nombre de fois qu'on a obtenue  $x_i$  . Le nombre  $\frac{n_i}{N}$  s'appelle la probabilité de l' événement élémentaire  $\{x_i\}$

on note  $p_i = p(\{x_i\}) = \frac{n_i}{N}$  on a:  $p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n = 1$ .

La probabilité d'un événement A est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le constituent:

Si  $A = \{x_1, x_3, x_7\}$  alors  $p(A) = p(\{x_1\}) + p(\{x_3\}) + p(\{x_7\})$

## Exemple

Dans l'activité précédente:  $\Omega = \{ F, P \}$  donc  $p(\{ F \}) + p(\{ P \}) = 1$

## Propriété

A et B sont deux événements d'un univers  $\Omega$  d'une expérience aléatoire

$$\forall A \in \Omega : 0 \leq p(A) \leq 1 ; \quad p(\Omega) = 1 ; \quad p(\emptyset) = 0$$

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

$$p(\bar{A}) = 1 - p(A).$$

## Exercice 1

Une urne contient 3 boules blanches numérotées de 1 à 3 et 5 boules vertes numérotées de 1 à 5

Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

On tire au hasard une boule de l'urne.

1) Déterminer  $\Omega$  l'univers des cas possibles.

2) Déterminer la probabilité de chaque événement élémentaire.

3) Considérons les événements suivants :

A : "La boule tirée est blanche"

B : "La boule tirée porte un numéro supérieur ou égal à 4"

C : "La boule tirée est verte et porte un numéro pair"

a) Calculer  $p(A)$ ,  $p(B)$  et  $p(C)$

b) Déterminer  $A \cup B$  puis montrer que  $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

c) A-t-on  $p(B \cap C) = p(B) + p(C)$

4) Considérons les événements suivants :

D : "La boule tirée est verte"

E : "La boule tirée est blanche ou porte un numéro impair"

Calculer  $p(D)$  et  $p(E)$  en utilisant 3)a)

## 3- Hypothèse d'équiprobabilité :

### Propriété :

Soit une expérience aléatoire d'univers  $\Omega$  où tous les événements élémentaires

ont même probabilité alors probabilité d'un événement A de  $\Omega$  est :

$$p(A) = \frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega}$$

## Remarque

L'équiprobabilité est exprimé par les expressions suivantes:

- Les boules sont indiscernables au toucher.
- On lance un dé au hasard .
- On lance une pièce de monnaie équilibrée .

## Exemple

On lance au hasard dans l'air un dé et on note le nombre de points de la face supérieure.

Soit l'événement :  $A = \{1,2,3,4,5,6\}$  on a  $p(A) = \frac{\text{card } A}{\text{card } \Omega} = \frac{4}{6}$  avec  $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

## Exercice 2

On lance trois fois de suite une pièce de monnaie équilibrée.

- 1) Déterminer l'univers des cas possibles.
- 2) Calculer la probabilité de chacun des événements suivants:

A:" Obtenir au moins deux piles "

B:" Obtenir face au premier lancer et pile au deuxième lancer "

C:" Obtenir au plus une fois pile "

- 3) Les deux événements A et C sont ils incompatibles ?

### 4- Exercices d'application:

## Exercice 3 :

Un sac contient 4 boules rouges, 3 boules vertes et 2 boules blanches. On tire simultanément et au hasard 3 boules du sac.

- 1) combien y'a-t-il de résultats possibles ?
- 2) Calculer la probabilité de chaque événement :

A:" Obtenir 3 boules de même couleur "

B :" Obtenir 3 boules de couleurs distinctes deux à deux "

C:" Obtenir 3 boules de couleurs distinctes"

D :" Obtenir au plus 2 boules rouges "

E :" Obtenir au moins une boule blanche "

## Exercice 4 :

Une urne contient 8 boules indiscernables au toucher : 3 rouges numérotées 1,0,2 et 5 noires numérotées:0,0,0,1,1.

On tire successivement et sans remise 3 boules de l'urne.

- 1)Calculer les probabilités de chacun des événements suivants:

A:" Obtenir 3 boules de même couleur "

B:" Obtenir 3 boules avec des numéros pairs "

C:" Obtenir 3 boules avec 3 numéros disjoints deux à deux "

D:" Obtenir 3 boules de même numéro "

- 2)Calculer les probabilités de chacun des événements suivants:

$\bar{A}$  ,  $A \cap B$  puis  $A \cup B$

### III- Probabilité conditionnelle- indépendance de deux événements:

#### 1- Probabilité conditionnelle -indépendance de deux événements:

Définitions :

A et B sont deux événements d'un univers  $\Omega$  d'une expérience aléatoire .

Probabilité de l'événement B sachant que l'événement A est réalisé est  $\frac{p(A \cap B)}{p(A)}$  .

on la note par  $p_A(B)$  ou par  $p(B/A)$  donc on a  $p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$

A et B sont deux événements indépendants si  $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$  c'est à dire:  $p_A(B) = p(B)$  .

Propriétés :

A et B deux événements non vides c à d :  $p(A) \neq 0$  et  $p(B) \neq 0$

On a :  $p(A \cap B) = p(A)p_A(B) = p(B)p_B(A)$

Exercice 5 :

Un sac contient 10 boules indiscernables au toucher : 5 boules noires numérotées 0,0,0,1,1  
3 boules blanches numérotées 1,1,2  
2 boules rouges numérotées 2,2

On tire simultanément et au hasard 3 boules du sac

On considère les deux événements suivants :

A : " les boules tirées ont la même couleur "

B : " les boules tirées portent le même numéro "

1) Calculer  $p(A)$  ,  $p(B)$  et  $p(A \cap B)$

2) Est-ce que les événements A et B sont indépendants ?

3) Calculer la probabilité de chaque événement :

C : " les boules tirées portent le même numéro sachant qu'il ont la même couleur "

D : " les boules tirées ont la même couleur sachant qu' il portent le même numéro "

#### 2- Expérience composée :

Définitions :

$A_1$  et  $A_2$  sont deux événements d'un univers  $\Omega$  d'une expérience aléatoire et qui forment une partition de  $\Omega$  c à d  $A_1$  et  $A_2$  sont disjoints et  $A_1 \cup A_2 = \Omega$  .

La probabilité d'un événement B de  $\Omega$  est :  $p(B) = p(A_1)p_{A_1}(B) + p(A_2)p_{A_2}(B)$

**Exemple :**

On considère deux urnes  $U_1$  et  $U_2$  tel que :

$U_1$  contient 5 jetons rouges et 3 jetons verts.

$U_2$  contient 4 jetons rouges, 2 jetons verts et 5 jetons bleus

4R 2V 5B

5R 3V

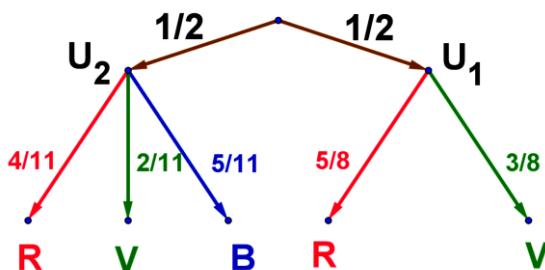
$U_2$

$U_1$

On choisit au hasard une urne puis on tire un seul jeton .

Soit l'événement  $V$ : " le jeton tiré a la couleur verte "

On construit l'arbre de probabilité :



On calcule la probabilité de l'événement  $V$  :

On considère les événements suivants :

$U_1$  « le choix de l'urne  $U_1$  »       $U_2$  « le choix de l'urne  $U_2$  »

On a :  $V = (U_1 \cap V) \cup (U_2 \cap V)$

$$\begin{aligned}
 \text{Donc : } p(V) &= P((U_1 \cap V) \cup (U_2 \cap V)) \\
 &= p(U_1 \cap V) + p(U_2 \cap V) \\
 &= p(U_1)p_{U_1}(V) + p(U_2)p_{U_2}(V) \\
 &= \frac{1}{2} \times \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{11}
 \end{aligned}$$

$$\text{D'où } p(V) = \frac{49}{176}$$

## IV- Variable aléatoire- loi de probabilité :

### 1- Variable aléatoire:

**Activité:**

Un sac contient 6 cartes indiscernables au toucher numérotées de 1 à 6 .

On tire au hasard et simultanément 3 cartes du sac.

On associe chaque à tirage le nombre de cartes qui portent un numéro pair.

Cette relation est entre l'ensemble des cas possible  $\Omega$  et l'ensemble  $\mathbb{R}$

On la note  $X$  et on l'appelle variable aléatoire sur  $\Omega$  et on a:

# هذا الملف تم تحميله من موقع Talamid.ma

$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

$$A_i \mapsto X(A_i) = x_i$$

$x_i$  est le nombre de cartes de numéros pairs pour chaque tirage  $A_i$

$x = 0$  :" toutes les cartes tirées portent des numéros impairs "

$x = 1$  :" une seule carte des cartes tirées porte un numéro pair "

$x = 2$  :" deux cartes exactement des cartes tirées porte un numéro pair "

$x = 3$  :" les trois cartes tirées portent des numéros pairs "

Les valeurs du variable aléatoire  $X$  sont : 0,1,2,3 et on écrit :  $X(\Omega) = \{0,1,2,3\}$

Vocabulaire:

En général on note:  $X(\Omega) = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$  l'ensemble des valeurs de la variable aléatoire  $X$ .

L'écriture  $p(X = x_i)$  c'est la probabilité de l'événement  $A_i = (X = x_i)$

Exemple :

Calculer la probabilité de chaque valeur de la variable aléatoire  $X$  de l'activité précédente.

On tire simultanément 3 cartes parmi 6 donc  $\text{card } \Omega = C_6^3 = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 20$

$$p(X = 0) = \frac{\text{card}(X = 0)}{\text{card } \Omega} = \frac{C_3^3}{C_6^3} = \frac{1}{20} \quad "X = 0" : 3 \text{ cartes impairs}$$

$$p(X = 1) = \frac{\text{card}(X = 1)}{\text{card } \Omega} = \frac{C_3^1 \times C_3^2}{C_6^3} = \frac{9}{20} \quad "X = 1" : 1 \text{ pair et 2 impairs}$$

$$p(X = 2) = \frac{\text{card}(X = 2)}{\text{card } \Omega} = \frac{C_3^2 \times C_3^1}{C_6^3} = \frac{9}{20} \quad "X = 2" : 2 \text{ pairs et 1 impair}$$

$$p(X = 3) = \frac{\text{card}(X = 3)}{\text{card } \Omega} = \frac{C_3^3}{C_6^3} = \frac{1}{20} \quad "X = 3" : 3 \text{ cartes pairs}$$

2- Loi de probabilité d'une variable aléatoire:

Définition:

Soit  $X$  une variable aléatoire définie sur un univers  $\Omega$  d'une expérience aléatoire .

L'ensemble des valeurs de  $X$  est  $X(\Omega) = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$

Loi de probabilité de  $X$  : c'est de calculer toutes les probabilités  $p(X = x_i)$  avec  $x_i \in X(\Omega)$

On peut donner la loi de probabilité de la variable aléatoire  $X$  sous forme d'un tableau :

$x_i$	$x_1$	$x_2$	.....	$x_n$
$p(X = x_i)$	$p(X = x_1)$	$p(X = x_2)$	.....	$p(X = x_n)$

**Remarque:**

$$p(X=x_1) + p(X=x_2) + p(X=x_3) + \cdots + p(X=x_n) = 1$$

**Exemple :**

La loi de probabilité du variable aléatoire X de l'exemple précédent est:

X = x <sub>i</sub>	X = 0	X = 1	X = 2	X = 3
p(X=x <sub>i</sub> )	$\frac{1}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{1}{20}$

$$\text{et on a : } \frac{1}{20} + \frac{9}{20} + \frac{9}{20} + \frac{1}{20} = 1$$

## V- Espérance mathématique- variance- écart type :

### 1- Définition

Soit X une variable aléatoire définie sur un univers  $\Omega$  d'une expérience aléatoire .

L'ensemble des valeurs de X est  $X(\Omega) = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$

- Le nombre :  $E(X) = \sum_{i=1}^{i=n} x_i \cdot p(X=x_i) = x_1 \cdot p(X=x_1) + x_2 \cdot p(X=x_2) + \cdots + x_n \cdot p(X=x_n)$  s'appelle l'espérance mathématique du variable aléatoire X
- Le nombre  $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$   
 $= (x_1)^2 \cdot p(X=x_1) + (x_2)^2 \cdot p(X=x_2) + \cdots + (x_n)^2 \cdot p(X=x_n) - [E(X)]^2$  s'appelle la variance du variable aléatoire X .
- Le nombre :  $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$  s'appelle l'écart-type du variable aléatoire X .

### 2- Remarque:

$$V(X) \geq 0$$

### 3- Exemple :

Calcule de l'espérance mathématique, variance et écart-type du variable aléatoire de l'exemple précédent.

x <sub>i</sub>	x <sub>1</sub> = 0	x <sub>2</sub> = 1	x <sub>3</sub> = 2	x <sub>4</sub> = 3
p(X=x <sub>i</sub> )	$\frac{1}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{1}{20}$
x <sub>i</sub> × p(X=x <sub>i</sub> )	0	$\frac{9}{20}$	$\frac{18}{20}$	$\frac{3}{20}$
x <sub>i</sub> <sup>2</sup> × p(X=x <sub>i</sub> )	0	$1^2 \times \frac{9}{20}$	$2^2 \times \frac{18}{20}$	$3^2 \times \frac{3}{20}$

D'après le tableau on a:

**l'espérance mathématique de X**

$$\begin{aligned} E(X) &= x_1 \times p(X=x_1) + x_2 \times p(X=x_2) + x_3 \times p(X=x_3) + x_4 \times p(X=x_4) \\ &= 0 + \frac{9}{20} + \frac{18}{20} + \frac{3}{20} = \frac{30}{20} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

**la variance de X**

$$\begin{aligned} V(X) &= (x_1)^2 \times p(X=x_1) + (x_2)^2 \times p(X=x_2) + \dots + (x_n)^2 \times p(X=x_n) - [E(X)]^2 \\ &= 0 + 1^2 \times \frac{9}{20} + 2^2 \times \frac{18}{20} + 3^2 \times \frac{3}{20} - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{63}{20} \end{aligned}$$

**l'écart-type de X**

$$\begin{aligned} \sigma(X) &= \sqrt{V(X)} \\ &= \sqrt{\frac{63}{20}} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{7}{5}} \end{aligned}$$

**V- Loi binomiale :**

#### 1- Définition :

Soit  $p$  la probabilité d'un événement  $S$  d'une expérience aléatoire.

On répète cette expérience  $n$  fois .On considère  $X$  la variable aléatoire associé au nombre de fois ou l'événement  $S$  est réalisé. On a :  $X(\Omega)=\{0,1,2,\dots,n\}$

$X$  est appelé **loi binomiale** ou **distribution binomiale** de paramètres  $n$  et  $p$ .

#### 2- Propriétés :

Soit  $X$  une loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p$ . On a:

$$E(X) = n.p \quad \text{et} \quad V(X) = n.p.(1-p)$$

#### 3- Exemple :

On considère l'expérience aléatoire de l' exemple précédent.Soit l'événement  $S$ : " les trois cartes tirées portent des numéros impairs" On a  $S : (X=0)$  et  $p(S) = p(X=0) = \frac{1}{20}$

On répète cette expérience( tirage de 3 cartes simultanément) 4 fois avec les même conditions de départ.

On considère la variable aléatoire  $X$  associée au nombre de fois où l' événement  $S$  est réalisé .

$X$  est une loi binomiale de paramètres 4 et  $\frac{1}{20}$

Calculons l'espérance mathématique et la variance de la loi binomiale  $X$

$$\begin{aligned} E(X) &= n.p & V(X) &= n.p.(1-p) \\ &= 4 \times \frac{1}{20} & &= 4 \times \frac{1}{20} \times \left(1 - \frac{1}{20}\right) \\ &= \frac{1}{5} & &= \frac{19}{100} \end{aligned}$$