

CALCUL DE PROBABILITES

I-Expérience aléatoire - Evénement- Univers:

1-Activité :

expérience 1 : On lance un dé (cube à six faces numérotés de 1 à 6) et on note le résultat de la face supérieure. Quel sont les résultats possibles ?

expérience 2 : On lance une pièce de monnaie 3 fois successives et on note à chaque fois le résultat de la face supérieure. Quels sont les résultats possibles ?

2-Expérience aléatoire-Eventualité-Univers-Evénement :

Définitions et exemples

Expérience aléatoire : On appelle expérience aléatoire toute expérience dont les résultats possibles sont connus mais on ne peut pas donner le résultat exact avant de la réaliser.

exemple : **expérience 1** et **expérience 2**

Les résultats possibles de ces deux expériences aléatoires :

exemple: **expérience 1:** $\{1,2,3,4,5,6\}$

expérience 2: $\{FFF,FFP,FPF,FPP,PPP,PPF,PFP,PFF\}$

Eventualité-Evénement élémentaire : Chaque cas possible s'appelle éventualité ou événement élémentaire.

exemple: **expérience 1:** $\{1\}$ est une éventualité
expérience 2: $\{FPF\}$ est une éventualité

Univers : les éventualités (ou les événements élémentaires) constituent un ensemble qu' on appelle univers.

On le note Ω

expérience 1: $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

expérience 2: $\Omega = \{FFF,FFP,FPF,FPP,PPP,PPF,PFP,PFF\}$

Evènement : toute partie A de Ω s'appelle événement .

expérience 1: $A = \{1,4\}$ est un événement.

expérience 2: $B = \{FFP,PPF,PFF\}$ est un événement.

3- Vocabulaire et notation :

- L'événement $A = \emptyset$ s'appelle **événement impossible** .
- L'événement $A = \Omega$ s'appelle **événement certain** .
- L'événement $A \cap B$ est l'ensemble constitué par des éventualités réalisées à la fois par les deux événements A et B .
expérience1: $A = \{1,3,4\}$ et $B = \{2,3,4,6\}$ alors $A \cap B = \{3,4\}$
- L'événement $A \cup B$ est l'ensemble constitués par des éventualités réalisées soit par l'événement A ou par l'événement B .

expérience1: $A = \{1,3,4\}$ et $B = \{2,3,4,6\}$ alors $A \cup B = \{1,2,3,4,6\}$

- Si $A \cap B = \emptyset$ on dit que A et B sont **deux événements incompatibles**.

expérience1: $A = \{1,3,4\}$ et $B = \{2,6\}$ alors $A \cap B = \emptyset$

- Si $A \cap B = \emptyset$ et $A \cup B = \Omega$ alors B s'appelle **l'événement contraire de A** on le note \bar{B} et on a $A = \bar{\bar{A}}$ et $\bar{A} = \bar{B}$. On dit que A et B constituent une partition de Ω

expérience1: $A = \{1,4\}$ l'événement contraire de A est $\bar{A} = \{2,3,5,6\}$

expérience2: $B = \{FFP, PPF, PFF\}$ l'événement contraire de A est $\bar{B} = \{FPP; FPF; PFP; FFF; PPP\}$

II- Notion de probabilité :

1- Activité :

On lance dans l'air une pièce de monnaie et on marque à chaque fois la face supérieur.

On répète cet expérience 100 fois. Ce tableau donne le nombre de réalisations de chaque face:

face	F	P
Nombres des fois	53	47

1.Déterminer l' événement élémentaire qui a la plus grande chance d être réaliser.

2.Déterminer l' événement élémentaire qui a la plus petite chance d être réaliser.

1.C' est l' événement élémentaire **F** qui a la plus grande chance d être réaliser.

On dit que la probabilité de l événement élémentaire **F** est $\frac{53}{100}$ on écrit $p(\{ \mathbf{F} \}) = \frac{53}{100}$

2.Cest l événement élémentaire **P** qui a la plus petite chance d être réaliser.

On dit que la probabilité de l événement élémentaire **P** est $\frac{47}{100}$ on écrit $p(\{ \mathbf{P} \}) = \frac{47}{100}$

2- Définition:

Soit $\Omega = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ univers des éventualités d'une expérience aléatoire .

Lorsque on répète une expérience aléatoire N fois dans les mêmes conditions si n_i est le nombre

de fois qu'on a obtenue x_i . Le nombre $\frac{n_i}{N}$ s'appelle la probabilité de l' événement élémentaire $\{x_i\}$

on note $p_i = p(\{x_i\}) = \frac{n_i}{N}$ on a: $p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n = 1$.

La probabilité d'un événement A est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le constituent:

Si $A = \{x_1, x_3, x_7\}$ alors $p(A) = p(\{x_1\}) + p(\{x_3\}) + p(\{x_7\})$

Exemple

Dans l'activité précédente: $\Omega = \{ \mathbf{F}, \mathbf{P} \}$ donc $p(\{ \mathbf{F} \}) + p(\{ \mathbf{P} \}) = 1$

Propriété

A et B sont deux événements d'un univers Ω d'une expérience aléatoire

$$\forall A \in \Omega : 0 \leq p(A) \leq 1 ; \quad p(\Omega) = 1 ; \quad p(\emptyset) = 0$$

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

$$p(\overline{A}) = 1 - p(A).$$

Exercice 1

Une urne contient 3 boules blanches numérotées de 1 à 3 et 5 boules vertes numérotées de 1 à 5

Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

On tire au hasard une boule de l'urne.

- 1) Déterminer Ω l'univers des cas possibles.
- 2) Déterminer la probabilité de chaque événement élémentaire.
- 3) Considérons les événements suivants :

A : " La boule tirée est blanche "

B : " La boule tirée porte un numéro supérieur ou égal à 4 "

C : " La boule tirée est verte et porte un numéro pair "

a) Calculer $p(A)$, $p(B)$ et $p(C)$

b) Déterminer $A \cup B$ puis montrer que $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

c) A-t-on $p(B \cup C) = p(B) + p(C)$

- 4) Considérons les événements suivants :

D : " La boule tirée est verte "

E : " La boule tirée est blanche ou porte un numéro impair "

Calculer $p(D)$ et $p(E)$ en utilisant 3)a)

3- Hypothèse d'équiprobabilité :

Propriété :

Soit une expérience aléatoire d'univers Ω ou tout les événements élémentaires

ont même probabilité alors probabilité d'un événement A de Ω est :

$$p(A) = \frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega}$$

Remarque

L'équiprobabilité est exprimé par les expressions suivantes:

- Les boules sont indiscernables au toucher.
- On lance un dé au hasard .
- On lance une pièce de monnaie équilibrée .

Exemple

On lance au hasard dans l'air un dé et on note le nombre de points de la face supérieur.

Soit l'événement : $A = \{1,2,5,6\}$ on a $p(A) = \frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega} = \frac{4}{6}$ avec $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

Exercice 2

On lance trois fois de suite une pièce de monnaie équilibrée.

- 1) Déterminer l'univers des cas possibles.
- 2) Calculer la probabilité de chacun des événements suivants:

A: " Obtenir au moins deux piles "

B: " Obtenir face au premier lancer et pile au deuxième lancer "

C: " Obtenir au plus une fois pile "

- 3) Les deux événements A et C sont ils incompatibles ?

4- Exercices d'application:

Exercice 3 :

Un sac contient 4 boules rouges, 3 boules vertes et 2 boules blanches. On tire simultanément et au hasard 3 boules du sac.

- 1) combien y' a-t-il de résultats possibles ?
- 2) Calculer la probabilité de chaque événement :

A: " Obtenir 3 boules de même couleur "

B : " Obtenir 3 boules de couleurs distinctes deux à deux "

C: " Obtenir 3 boules de couleurs distinctes "

D : " Obtenir au plus 2 boules rouges "

E : " Obtenir au moins une boule blanche "

Exercice 4 :

Une urne contient 8 boules indiscernables au toucher : 3 rouges numérotées 1,0,2 et 5 noires numérotés:0,0,0,1,1.

On tire successivement et sans remise 3 boules de l'urne.

- 1) Calculer les probabilités de chacun des événements suivants:

A: " Obtenir 3 boules de même couleur "

B: " Obtenir 3 boules avec des numéros pairs "

C: " Obtenir 3 boules avec 3 numéros disjoints deux à deux "

D: " Obtenir 3 boules de même numéro "

- 2) Calculer les probabilités de chacun des événements suivants:

\bar{A} , $A \cap B$ puis $A \cup B$

III- Probabilité conditionnelle- indépendance de deux événements:

1- Probabilité conditionnelle -indépendance de deux événements:

Définitions :

A et B sont deux événements d'un univers Ω d'une expérience aléatoire .

Probabilité de l'événement B sachant que l'événement A est réalisé est $\frac{p(A \cap B)}{p(A)}$.

on la note par $p_A(B)$ ou par $p(B/A)$ donc on a $p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$

A et B sont deux événements indépendants si $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$ c'est à dire: $p_A(B) = p(B)$.

Propriétés :

A et B deux événements non vides c à d : $p(A) \neq 0$ et $p(B) \neq 0$

On a : $p(A \cap B) = p(A)p_A(B) = p(B)p_B(A)$

Exercice 5 :

Un sac contient 10 boules indiscernables au toucher : 5 boules noires numérotées 0,0,0,1,1
3 boules blanches numérotées 1,1,2
2 boules rouges numérotées 2,2

On tire simultanément et au hasard 3 boules du sac

On considère les deux événements suivants :

A : " les boules tirées ont la même couleur "

B : " les boules tirées portent le même numéro "

1) Calculer $p(A)$, $p(B)$ et $p(A \cap B)$

2) Est-ce que les événements A et B sont indépendants ?

3) Calculer la probabilité de chaque événement :

C : " les boules tirées portent le même numéro sachant qu'il ont la même couleur "

D : " les boules tirées ont la même couleur sachant qu' il portent le même numéro "

2- Expérience composée :

Définitions :

A_1 et A_2 sont deux événements d'un univers Ω d'une expérience aléatoire et qui forment une partition de Ω c à d A_1 et A_2 sont disjoints et $A_1 \cup A_2 = \Omega$.

La probabilité d'un événement B de Ω est : $p(B) = p(A_1)p_{A_1}(B) + p(A_2)p_{A_2}(B)$

Exemple :

On considère deux urnes U_1 et U_2 tel que :

U_1 contient 5 jetons rouges et 3 jetons verts.

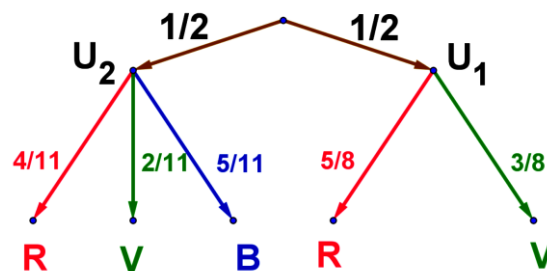
U_2 contient 4 jetons rouges, 2 jetons verts et 5 jetons bleu



On choisit au hasard une urne puis on tire un seul jeton .

Soit l'événement V : " le jeton tiré a la couleur verte "

On construit l'arbre de probabilité :



On calcule la probabilité de l'événement V :

On considère les événements suivants :

U_1 « le choix de l'urne U_1 »

U_2 « le choix de l'urne U_2 »

On a : $V = (U_1 \cap V) \cup (U_2 \cap V)$

Donc :

$$\begin{aligned}
 p(V) &= P((U_1 \cap V) \cup (U_2 \cap V)) \\
 &= p(U_1 \cap V) + p(U_2 \cap V) \\
 &= p(U_1)p_{U_1}(V) + p(U_2)p_{U_2}(V) \\
 &= \frac{1}{2} \times \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{11}
 \end{aligned}$$

D' ou $p(V) = \frac{49}{176}$

IV- Variable aléatoire- loi de probabilité :

1- Variable aléatoire:

Activité:

Un sac contient 6 cartes indiscernables au toucher numérotés de 1 à 6 .

On tire au hasard et simultanément 3 cartes du sac.

On associe chaque à tirage le nombre de cartes qui portent un numéro pair.

Cette relation est entre l'ensemble des cas possible Ω et l'ensemble \mathbb{R}

On la note X et on l'appelle variable aléatoire sur Ω et on a:

$$X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

$$A_i \mapsto X(A_i) = x_i$$

x_i est le nombre de cartes de numéros pairs pour chaque tirage A_i

$x = 0$: " toutes les cartes tirées portent des numéros impairs "

$x = 1$: " une seule carte des cartes tirées porte un numéro pair "

$x = 2$: " deux cartes exactement des cartes tirées porte un numéro pair "

$x = 3$: " les trois cartes tirées portent des numéros pairs "

Les valeurs du variable aléatoire X sont : 0,1,2,3 et on écrit : $X(\Omega) = \{0,1,2,3\}$

Vocabulaire:

En général on note: $X(\Omega) = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ l'ensemble des valeurs de la variable aléatoire X .

L'écriture $p(X = x_i)$ c'est la probabilité de l'événement $A_i = (X = x_i)$

Exemple :

Calculer la probabilité de chaque valeur de la variable aléatoire X de l'activité précédente.

On tire simultanément 3 cartes parmi 6 donc $\text{card } \Omega = C_6^3 = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 20$

$$p(X = 0) = \frac{\text{card}(X = 0)}{\text{card}\Omega} = \frac{C_3^3}{C_6^3} = \frac{1}{20} \quad \text{" } X = 0 \text{ " : 3 cartes impairs}$$

$$p(X = 1) = \frac{\text{card}(X = 1)}{\text{card}\Omega} = \frac{C_3^1 \times C_3^2}{C_6^3} = \frac{9}{20} \quad \text{" } X = 1 \text{ " : 1pair et 2 impairs}$$

$$p(X = 2) = \frac{\text{card}(X = 2)}{\text{card}\Omega} = \frac{C_3^2 \times C_3^1}{C_6^3} = \frac{9}{20} \quad \text{" } X = 2 \text{ " : 2pairs et 1 impair}$$

$$p(X = 3) = \frac{\text{card}(X = 3)}{\text{card}\Omega} = \frac{C_3^3}{C_6^3} = \frac{1}{20} \quad \text{" } X = 3 \text{ " : 3 cartes pairs}$$

2- Loi de probabilité d'une variable aléatoire:

Définition:

Soit X une variable aléatoire définie sur un univers Ω d'une expérience aléatoire .

L'ensemble des valeurs de X est $X(\Omega) = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$

Loi de probabilité de X : c'est de calculer toutes les probabilités $p(X = x_i)$ avec $x_i \in X(\Omega)$

On peut donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X sous forme d'un tableau :

x_i	x_1	x_2	x_n
$p(X = x_i)$	$p(X = x_1)$	$p(X = x_2)$	$p(X = x_n)$

Remarque:

$$p(X = x_1) + p(X = x_2) + p(X = x_3) + \dots + p(X = x_n) = 1$$

Exemple :

La loi de probabilité du variable aléatoire X de l'exemple précédent est:

$X = x_i$	$X = 0$	$X = 1$	$X = 2$	$X = 3$
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{1}{20}$

$$\text{et on a : } \frac{1}{20} + \frac{9}{20} + \frac{9}{20} + \frac{1}{20} = 1$$

V- Espérance mathématique- variance- écart type :

1- Définition

Soit X une variable aléatoire définie sur un univers Ω d'une expérience aléatoire .

L'ensemble des valeurs de X est $X(\Omega) = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$

- Le nombre : $E(X) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot p(X = x_i) = x_1 \cdot p(X = x_1) + x_2 \cdot p(X = x_2) + \dots + x_n \cdot p(X = x_n)$

s'appelle **l'espérance mathématique** du variable aléatoire X

- Le nombre $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$
 $= (x_1)^2 \cdot p(X = x_1) + (x_2)^2 \cdot p(X = x_2) + \dots + (x_n)^2 \cdot p(X = x_n) - [E(X)]^2$ s'appelle

la variance du variable aléatoire X .

- Le nombre : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$ s'appelle **l'ecart-type** du variable aléatoire X .

2- Remarque:

$$V(X) \geq 0$$

3- Exemple :

Calcule de l'espérance mathématique, variance et écart-type du variable aléatoire de l'exemple précédent.

x_i	$x_1 = 0$	$x_2 = 1$	$x_3 = 2$	$x_4 = 3$
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{1}{20}$
$x_i \times p(X = x_i)$	0	$\frac{9}{20}$	$\frac{18}{20}$	$\frac{3}{20}$
$x_i^2 \times p(X = x_i)$	0	$1^2 \times \frac{9}{20}$	$2^2 \times \frac{18}{20}$	$3^2 \times \frac{3}{20}$

D'après le tableau on a:

l'espérance mathématique de X

$$\begin{aligned} E(X) &= x_1 \times p(X = x_1) + x_2 \times p(X = x_2) + x_3 \times p(X = x_3) + x_4 \times p(X = x_4) \\ &= 0 + \frac{9}{20} + \frac{18}{20} + \frac{3}{20} = \frac{30}{20} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

la variance de X

$$\begin{aligned} V(X) &= (x_1)^2 \times p(X = x_1) + (x_2)^2 \times p(X = x_2) + \dots + (x_n)^2 \times p(X = x_n) - [E(X)]^2 \\ &= 0 + 1^2 \times \frac{9}{20} + 2^2 \times \frac{18}{20} + 3^2 \times \frac{3}{20} - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{63}{20} \end{aligned}$$

l'écart-type de X

$$\begin{aligned} \sigma(X) &= \sqrt{V(X)} \\ &= \sqrt{\frac{63}{20}} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{7}{5}} \end{aligned}$$

V- Loi binomiale :

1- Définition :

Soit p la probabilité d'un événement S d'une expérience aléatoire.

On répète cette expérience n fois. On considère X la variable aléatoire associée au nombre de fois où l'événement S est réalisé. On a : $X(\Omega) = \{0, 1, 2, \dots, n\}$

X est appelé **loi binomiale** ou **distribution binomiale** de paramètres n et p .

2- Propriétés :

Soit X une loi binomiale de paramètres n et p . On a :

$$E(X) = n.p \quad \text{et} \quad V(X) = n.p.(1-p)$$

3- Exemple :

On considère l'expérience aléatoire de l'exemple précédent. Soit l'événement S : "les trois cartes tirées portent des numéros impairs". On a $S : (X=0)$ et $p(S) = p(X=0) = \frac{1}{20}$

On répète cette expérience (tirage de 3 cartes simultanément) 4 fois avec les mêmes conditions de départ.

On considère la variable aléatoire X associée au nombre de fois où l'événement S est réalisé.

X est une loi binomiale de paramètres 4 et $\frac{1}{20}$

Calculons l'espérance mathématique et la variance de la loi binomiale X

$$E(X) = n.p$$

$$\begin{aligned} &= 4 \times \frac{1}{20} \\ &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$

$$V(X) = n.p.(1-p)$$

$$\begin{aligned} &= 4 \times \frac{1}{20} \times \left(1 - \frac{1}{20}\right) \\ &= \frac{19}{100} \end{aligned}$$