I. Fonction exponentielle népérien

1) Définition :

La fonction exponentielle notée $\exp$, est la fonction réciproque de la fonction logarithme népérien $\ln$

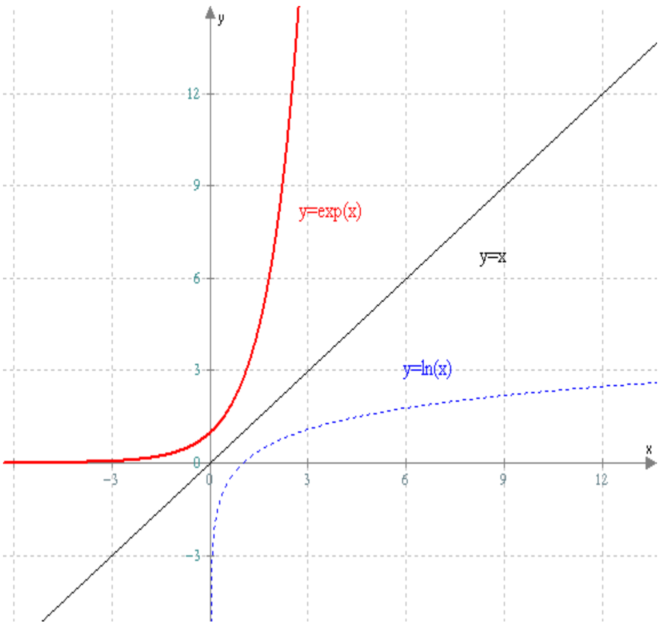
$$]0;+\infty[\underset{\exp}{\overset{\ln}{\rightleftarrows}} \mathbb{R} \quad ; \quad \begin{aligned} \exp : \mathbb{R} &\to]0;+\infty[\\ x &\mapsto \exp(x) \end{aligned}$$

Remarque : Pour tout x de $\mathbb{R}$: $\exp(x) > 0$

Notation : on note $\exp(x) = e^x$ et se lit : exponentielle de x ou e puissance x

2) Représentation graphique:

La courbe représentative graphique de la fonction $\exp$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ est la symétrique à la courbe de la fonction $\ln$ par rapport à la première bissectrice



3) Conséquences immédiates :

- $(\forall x \in \mathbb{R})\ (\forall y \in \mathbb{R}_+^*)$: $y = e^x \Leftrightarrow \ln y = x$
- $(\forall x \in \mathbb{R}) : \ln(e^x) = x$; $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) : e^{\ln x} = x$
- $(\forall x \in \mathbb{R}) : e^x > 0$
- $e^0 = 1$ et $e^1 = e \approx 2,718...$
- La, fonction exp est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et on a:
  $\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2 : x = y \Leftrightarrow e^x = e^y$ et $x < y \Leftrightarrow e^x < e^y$
- $x < 0 \Leftrightarrow e^x < 1$ et $x > 0 \Leftrightarrow x > 1$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

4) Propriétés algébriques de la fonction exp

Propriété

Pour tout x et y de $\mathbb{R}$: $e^x \times e^y = e^{x+y}$

Règles de calcul:

Pour tout x et y de $\mathbb{R}$ et pour tout r de $\mathbb{Q}$. on a :

$$e^{-y} = \frac{1}{e^y} \quad ; \quad e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y} \quad ; \quad e^{rx} = (e^x)^r$$

Exercice 1:

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivante :

$$e^{x-1}=e \;,\; e^{x^2-x}=1 \;,\; e^{2x}-3e^{x}+2=0 \;,\; e^{x}-2e^{-x}-1=0$$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivante :

$e^{x-2}<1 \;,\; e^{2x}-6e^{x}+5\geq 0 \;,\; e^{3x+1}-2e^{2x+1}+e^{x+1}<0$

5) Dérivée de la fonction exponentielle

La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a:

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R}\;;\;\left(e^{x}\right)'=e^{x}}$$

D'une façon générale :

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I alors la fonction $x\mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I et on a :

$$\boxed{\forall x\in I:\left(e^{u(x)}\right)'=\left(u(x)\right)'\times e^{u(x)}}$$

La fonction $x\mapsto u'(x)\times e^{u(x)}$ admet pour primitives , les fonctions $x\mapsto e^{u(x)}+C$ avec C une constante réelle

Exercice 2:

Calculer les dérivées de la fonction f dans les cas suivants :

$$f(x)=e^{\left(x^2+x-1\right)} \quad;\quad f(x)=e^{\frac{1}{x}-x} \quad;\quad f(x)=xe^{(x+1)} \quad;\quad f(x)=\frac{1}{x}e^{\left(x^2\right)}$$

6) Limites Remarquable :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{x}=+\infty \quad;\quad \lim_{x\to-\infty}xe^{x}=0 \quad;\quad \lim_{x\to0}\frac{e^{x}-1}{x}=1}$$

Exercice 3:

Déterminer les limites suivantes

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{x^2} \quad;\quad \lim_{x\to-\infty}x^3e^{x} \quad;\quad \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}e^{-x} \quad;\quad \lim_{x\to+\infty}x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$$

En général: $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}\;:\;\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{x^{n}}=+\infty \quad et \quad \lim_{x\to-\infty}x^{n}e^{x}=0}$

II. Etude et représentation graphique de fonctions composées

Exercice 4:

Etudier et représenter graphiquement la fonction f dans les cas suivants:

$$f:x\mapsto(x-1)e^{x} \quad;\quad f:x\mapsto\frac{e^{x}}{x} \quad;\quad f:x\mapsto\frac{e^{x}-1}{e^{x}} \quad;\quad f:x\mapsto\frac{xe^{x}}{2x-1}$$

III. Fonction exponentielle de bas a : $(a>0 \;\; et \;\; a\neq1)$

1) Définition:

La fonction exponentielle de base quelconque a notée : $\exp_a$ est la fonction réciproque de la fonction logarithme de a

On note la fonction exponentielle de base a par :

$$\boxed{(\forall x\in\mathbb{R})\;;\;\exp_a(x)=a^{x}=e^{x\ln a}}$$

Remarque:

Si $a=e$ alors $\exp_e(x)=e^{x\ln e}=e^{x}$

Si $a=1$ alors on admet que pour tout x de $\mathbb{R}$; $\exp_1(x)=1^{x}=1$

2) Propriétés:

Pour tout x et y de $\mathbb{R}$ et pour tout r de $\mathbb{Q}$. on a :

$$a^x \times a^y = a^{x+y} \quad a^{-y} = \frac{1}{a^y} \quad ; \quad a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y} \quad ; \quad a^{rx} = \left(a^x\right)^r$$

$$x = y \Leftrightarrow a^x = a^y \quad et \quad x < y \Leftrightarrow a^x < a^y$$

Exercice 5:

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes:

$5\times 2^x - 2 = 0 \quad ; \; 4^x - 3\times 2^x + 2 = 0 \quad ; \quad 4^x - 3\times 2^x + 2 = 0$

Exercice 6:

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes:

$2^{x-1} - 1 < 0 \quad ; \; 4^x - 3\times 2^x + 2 \geq 0 \quad ; \quad 9^x - 3^{x+1} + 2 < 0$

3) Dérivée de la fonction $\exp_a$

La fonction exponentielle de base a est dérivable sur $\mathbb{R}$. et ona :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} : \left(a^x\right)' = (\ln a)\, a^x}$$

Si $0 < a < 1$ alors $\ln a < 0$		
x	$-\infty$	$+\infty$
$\left(a^x\right)'$	$-$	
a^x	$+\infty$ ↘	0

Si $a > 1$ alors $\ln a > 0$		
x	$-\infty$	$+\infty$
$\left(a^x\right)'$	$+$	
a^x	0 ↗	$+\infty$

Exercice 7:

Représenter graphiquement la fonction f dans les deux cas suivants:

$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x \quad ; \quad f(x) = 2^x$

Exercices :

Exo1:

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes:

$7^{2x} - 5^{3x+1} = 0 \quad ; \quad 2^{x+1} + 3\times 2^{-x} - 7 = 0 \quad ; \quad 100^x - 10^x = 2 \quad ; \quad \left(\sqrt{x}\right)^x = x^{\sqrt{x}}$

$\log_2(x)\times\log_8(x) = 3 \quad ; \quad \log_a(x) - \log_{a^2}(x) + \log_{a^4}(x) = \frac{3}{4}$

Exo2:

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes:

$1 + \left(\frac{1}{3}\right)^x > 5 \quad ; \quad 2^{2x-1} - 3^{x+2} + 4^{x+\frac{1}{2}} + 9^{\frac{x}{2}} < 0 \quad ; \quad 4^x - 3\times 2^x + 2 \geq 0$

Exo3:

Déterminer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x - x}{x^3} \; ; \; \lim\limits_{x\to+\infty} \left(e^x - 3x^2 + 1\right) \; ; \; \lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^9 - e^x\right) \; ; \; \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{xe^x} \; ; \; \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^{2008}}{e^{-x}};$

$\lim\limits_{x\to0} \frac{e^{2x} - 2e^x + 1}{x^2} \; ; \; \lim\limits_{x\to0} \frac{xe^x - 3x}{x^3} \; ; \; \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{1-e^x} \; ; \; \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^x - x} \; ; \; \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{x-3}}{x^5} \; ; \; \lim\limits_{x\to-\infty} x\left(1 - e^{\frac{1}{x}}\right);$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \left(e^{2x} - 3e^{\frac{1}{2}x}\right) \; ; \; \lim\limits_{x\to0^+} \frac{e^x - 1}{\sqrt{x}} \; ; \; \lim\limits_{x\to0^+} \frac{e^{\sqrt{x}} - 1}{x}; \; \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^3} e^{\sqrt{x}} \; ; \; \lim\limits_{x\to0^+} \frac{e^{-x\ln x}}{\ln(1+x)}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{e^x - 1}{x^5}\right) \quad \lim\limits_{x\to+\infty} \left(e^x - \ln x\right) \; ; \; \lim\limits_{x\to+\infty} \left(e^{-x}\ln x\right) \; ; \; \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(1+e^x\right) - x}{x - e^x} \; ; \; \lim\limits_{x\to1} \frac{e^x - xe^x}{x-1}$