

Axe de symétrie-Centre de symétrie-Point d'inflexion

EL KYAL MOHAMED

➤ Axe de symétrie – Point de symétrie :

La droite d'équation $x = a$ est un **axe de symétrie** de la courbe (C_f) si :

- $\forall x \in D_f \quad (2a - x) \in D_f$
- $\forall x \in D_f \quad f(2a - x) = f(x)$

Le point $I(a, b)$ est un **point de symétrie** de la courbe (C_f) si :

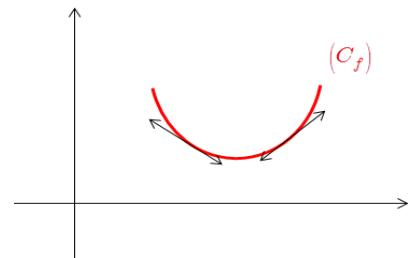
- $\forall x \in D_f \quad (2a - x) \in D_f$
- $\forall x \in D_f \quad f(2a - x) + f(x) = 2b$

➤ Concavité et point d'inflexion d'une courbe :

Une fonction est **convexe** sur un intervalle si sa courbe représentative sur cet intervalle, est entièrement située au-dessus de chacune de ses tangentes

Si $\forall x \in I \quad f''(x) \geq 0$

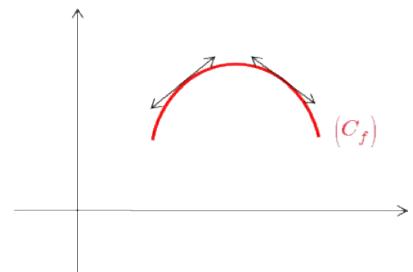
Alors la courbe (C_f) est convexe sur l'intervalle I



Une fonction est **concave** sur un intervalle si sa courbe représentative sur cet intervalle, est entièrement située au-dessous de chacune de ses tangentes

Si $\forall x \in I \quad f''(x) \leq 0$

Alors la courbe (C_f) est concave sur l'intervalle I



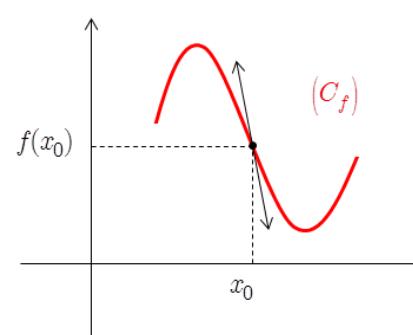
Un **point d'inflexion** d'une courbe (C_f) est le point où la courbe (C_f) change de concavité en ce point

Si f'' s'annule en changeant de signe en x_0

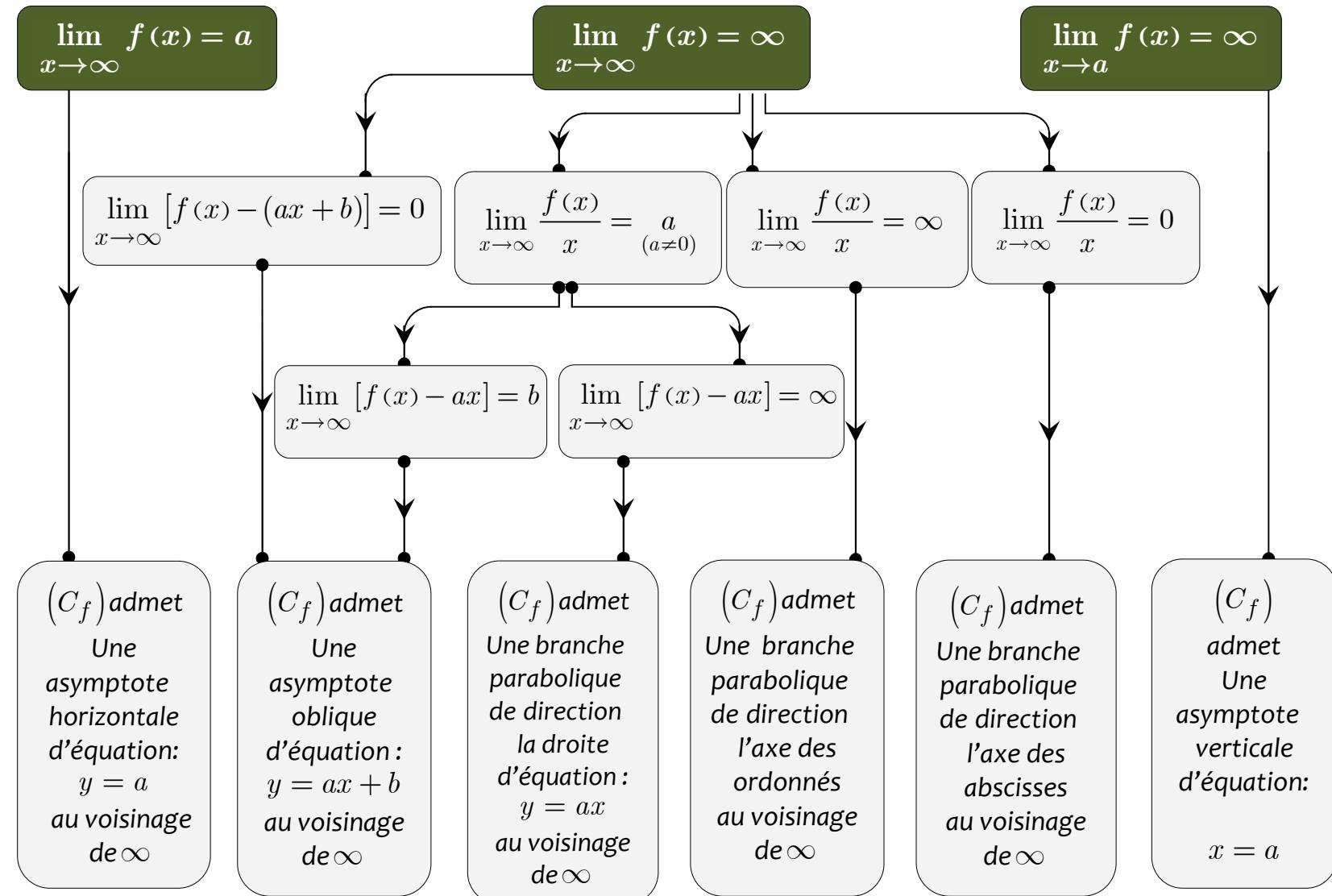
Alors la courbe (C_f) admet un point d'inflexion d'abscisse x_0

Si f' s'annule sans changer de signe en x_0

Alors la courbe (C_f) admet un point d'inflexion d'abscisse x_0



Branches infinies



Fonction réciproque

EL KYAL MOHAMED

➤ Propriété :

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I

alors f admet **une fonction réciproque**, notée f^{-1} , définie sur l'intervalle $f(I)$

et on a :
$$\begin{cases} f^{-1}(x) = y \\ x \in f(I) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(y) = x \\ y \in I \end{cases}$$

➤ Détermination de l'expression de $f^{-1}(x)$:

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I

Soit x un élément de $f(I)$ et y un élément de I tel que: $f^{-1}(x) = y$

On a: $f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x$ et en résolvant l'équation $f(y) = x$ d'inconnue y

On déduit l'expression de $f^{-1}(x)$ pour tout x de $f(I)$

➤ Continuité de la fonction réciproque :

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I

alors une fonction réciproque f^{-1} est continue sur l'intervalle $f(I)$

➤ Dérivabilité de la fonction réciproque :

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I

soit x_0 un élément de I et $y_0 = f(x_0)$

si f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) \neq 0$, alors la fonction f^{-1} est dérivable en y_0

et on a :
$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I

si f est dérivable sur I et f' ne s'annule pas sur I

alors la fonction f^{-1} est dérivable sur $f(I)$ et on a :

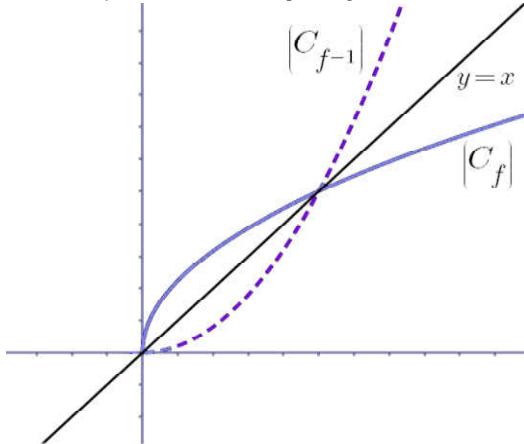
$$\forall x \in f(I) \quad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

➤ **Monotonie de la fonction réciproque :**

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I

Alors une fonction réciproque f^{-1} est strictement monotone sur $f(I)$
et varie dans le même sens que f

➤ **La courbe représentative de la fonction réciproque :**



Dans un repère orthonormé $\left(C_{f^{-1}}\right)$ est le symétrique de $\left(C_f\right)$ par rapport à la première bissectrice du repère (droite d'équation: $y = x$)

➤ **Remarques:**

La courbe (C_f)	⇒	La courbe $(C_{f^{-1}})$
$A(a, b) \in (C_f)$		$A'(b, a) \in (C_{f^{-1}})$
admet une asymptote verticale d'équation : $x = a$		admet une asymptote horizontale d'équation : $y = a$
admet une asymptote horizontale d'équation : $y = a$		admet une asymptote verticale d'équation : $x = a$
admet une asymptote oblique d'équation : $y = ax + b$		admet une asymptote oblique d'équation : $y = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$ (on détermine l'expression de y à partir de la relation: $x = ay + b$)
admet une tangente (ou demi-tangente) verticale		admet une tangente (ou demi-tangente) horizontale
admet une tangente (ou demi-tangente) horizontale		admet une tangente (ou demi-tangente) verticale