

## Dérivabilité

EL KYAL MOHAMED

### ➤ Fonction dérivable en un point:

On dit qu'une fonction  $f$  est **dérivable** en  $x_0$  si  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  existe et finie  
Cette limite est appelée le nombre dérivé de  $f$  en  $x_0$ , on le note  $f'(x_0)$ .

### ➤ L'équation de la tangente à une courbe :

Soit  $f$  fonction est dérivable en  $x_0$   
L'équation de la tangente à la courbe  $(C_f)$  au point d'abscisse  $x_0$   
est :  $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

### ➤ Dérivabilité à droite, à gauche en un point :

- On dit que  $f$  est **dérivable à droite** en  $x_0$ , si  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  existe et finie  
Cette limite est appelé le nombre dérivé de  $f$  à droite en  $x_0$ , on le note  $f'_d(x_0)$
- On dit que  $f$  est **dérivable à gauche** en  $x_0$ , si  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  existe et finie  
Cette limite est appelé le nombre dérivé de  $f$  à gauche en  $x_0$ , on le note  $f'_g(x_0)$

$f$  dérivable en  $x_0$ , si et seulement si  $f$  est dérivable à droite  
et à gauche en  $x_0$  et  $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$

### ➤ Dérivabilité et continuité :

Si  $f$  une fonction est dérivable en  $x_0$  alors  $f$  est continue en  $x_0$

### ➤ Dérivée des fonctions usuelles :

$f(x)$	$f'(x)$	
$k$	$0$	$(k \in \mathbb{R})$
$x$	$1$	
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	
$x^r$	$rx^{r-1}$	$(r \in \mathbb{Z}^* - \{1\})$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	

➤ **Opérations sur les fonctions dérivées- dérivée d'une fonction composée :**

$(u + v)' = u' + v'$	$(ku)' = k(u)' \quad (k \in \mathbb{R})$
$(uv)' = u'v + uv'$	$(u^n)' = nu' \cdot u^{n-1}$
$\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{-v'}{v^2}$	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
$(uov)' = [u'ov] \times v'$	$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

➤ **Dérivée et sens de variation :**

Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$

- $f$  est **croissante** sur  $I \Leftrightarrow \forall x \in I \quad f'(x) \geq 0$
- $f$  est **décroissante** sur  $I \Leftrightarrow \forall x \in I \quad f'(x) \leq 0$
- $f$  est **constante** sur  $I \Leftrightarrow \forall x \in I \quad f'(x) = 0$

➤ **Interprétation géométrique et dérivabilité :**

La limite	Dérivabilité en $x_0$	Interprétation géométrique : $(C_f)$ admet
$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a \quad (a \neq 0)$	$f$ est dérivable en $x_0$	Une tangente au point $A(x_0; f(x_0))$ de coefficient directeur $a$
$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$		Une tangente horizontale au point $A(x_0; f(x_0))$
$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a \quad (a \neq 0)$	$f$ est dérivable à droite en $x_0$	Une demi- tangente à droite au point $A(x_0; f(x_0))$ de coefficient directeur $a$
$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$		Une demi- tangente horizontale à droite au point $A(x_0; f(x_0))$
$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty$	$f$ n'est pas dérivable à droite en $x_0$	Une demi- tangente verticale à droite au point $A(x_0; f(x_0))$ dirigée vers le bas
$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$		Une demi- tangente verticale à droite au point $A(x_0; f(x_0))$ dirigée vers le haut
$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a \quad (a \neq 0)$	$f$ est dérivable à gauche en $x_0$	Une demi- tangente à gauche au point $A(x_0; f(x_0))$ de coefficient directeur $a$
$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$		Une demi-tangente horizontale à gauche au point $A(x_0; f(x_0))$
$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty$	$f$ n'est pas dérivable à gauche en $x_0$	Une demi- tangente verticale à gauche au point $A(x_0; f(x_0))$ dirigée vers le haut
$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$		Une demi- tangente verticale à droite au point $A(x_0; f(x_0))$ dirigée vers le bas