

Dérivabilité

EL KYAL MOHAMED

➤ Fonction dérivable en un point:

On dit qu'une fonction f est **dérivable** en x_0 si $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe et finie

Cette limite est appelée le nombre dérivé de f en x_0 , on le note $f'(x_0)$.

➤ L'équation de la tangente à une courbe :

Soit f fonction est dérivable en x_0

L'équation de la tangente à la courbe (C_f) au point d'abscisse x_0

est : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

➤ Dérivabilité à droite, à gauche en un point :

- On dit que f est **dérivable à droite** en x_0 , si $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe et finie

Cette limite est appelé le nombre dérivé de f à droite en x_0 , on le note $f'_d(x_0)$

- On dit que f est **dérivable à gauche** en x_0 , si $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe et finie

Cette limite est appelé le nombre dérivé de f à gauche en x_0 , on le note $f'_g(x_0)$

f dérivable en x_0 , si et seulement si f est dérivable à droite et à gauche en x_0 et $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$

➤ Dérivabilité et continuité :

Si f une fonction est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0

➤ Dérivée des fonctions usuelles :

$f(x)$	$f'(x)$	
k	0	$(k \in \mathbb{R})$
x	1	
$\frac{1}{x}$	$\frac{-1}{x^2}$	
x^r	rx^{r-1}	$(r \in \mathbb{Z}^* - \{1\})$
\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	

➤ Opérations sur les fonctions dérivées- dérivée d'une fonction composée :

$(u + v)' = u' + v'$	$(ku)' = k(u)' \quad (k \in \mathbb{R})$
$(uv)' = u'v + uv'$	$(u^n)' = nu' \cdot u^{n-1}$
$\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{-v'}{v^2}$	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
$(uov)' = [u'ov] \times v'$	$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

➤ Dérivée et sens de variation :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I

- f est **croissante** sur $I \Leftrightarrow \forall x \in I \quad f'(x) \geq 0$
- f est **décroissante** sur $I \Leftrightarrow \forall x \in I \quad f'(x) \leq 0$
- f est **constante** sur $I \Leftrightarrow \forall x \in I \quad f'(x) = 0$

➤ Interprétation géométrique et dérivabilité :

La limite	Dérivabilité en x_0	Interprétation géométrique : (C_f) admet
$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a \quad (a \neq 0)$	f est dérivable en x_0	Une tangente au point $A(x_0; f(x_0))$ de coefficient directeur a
$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$		Une tangente horizontale au point $A(x_0; f(x_0))$
$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a \quad (a \neq 0)$	f est dérivable à droite en x_0	Une demi-tangente à droite au point $A(x_0; f(x_0))$ de coefficient directeur a
$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$		Une demi-tangente horizontale à droite au point $A(x_0; f(x_0))$
$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty$	f n'est pas dérivable à droite en x_0	Une demi-tangente verticale à droite au point $A(x_0; f(x_0))$ dirigée vers le bas
$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$		Une demi-tangente verticale à droite au point $A(x_0; f(x_0))$ dirigée vers le haut
$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a \quad (a \neq 0)$	f est dérivable à gauche en x_0	Une demi-tangente à gauche au point $A(x_0; f(x_0))$ de coefficient directeur a
$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$		Une demi-tangente horizontale à gauche au point $A(x_0; f(x_0))$
$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty$	f n'est pas dérivable à gauche en x_0	Une demi-tangente verticale à gauche au point $A(x_0; f(x_0))$ dirigée vers le haut
$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$		Une demi-tangente verticale à droite au point $A(x_0; f(x_0))$ dirigée vers le bas