

Exercice 01 : 4,5 points

Soit la suite U_n définie par :

$$U_0 = 2 \quad \text{et} \quad U_{n+1} = \frac{3u_n+2}{2u_n+3} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

1) a- Calculer U_1 et U_2 .

b- Montrer que pour tout n de \mathbb{N} : $U_{n+1} - 1 = \frac{u_n - 1}{2u_n + 3}$ puis montrer par Réurrence que pour tout n de \mathbb{N} : $U_n > 1$.

c- Montrer que pour tout n de \mathbb{N} : $U_{n+1} - U_n = 2 \left(\frac{1 - u_n^2}{2u_n + 3} \right)$

d- En déduire que U_n est une suite décroissante et qu'elle est convergente.

2) On suppose que : $V_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

a. Vérifier que pour tout n de \mathbb{N} $V_n \neq 1$

b. Calculer V_0 .

c. Montrer que $V_{n+1} = \frac{3u_n + 5}{2(u_n + 1)}$ et en déduire que V_n une suite géométrique.

d. Calculer V_n en fonction de n .

3) a- Montrer que $U_n = \frac{1 + V_n}{1 - V_n}$

b- En déduire que $U_n = \frac{1 + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{5} \right)^n}{1 - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{5} \right)^n}$ pour tout n de \mathbb{N}

c- Calculer la limite de u_n en $+\infty$.

Exercice 02 : 4,5 points

Un sac contient neuf boules indiscernables au toucher portant respectivement les numéros :

0 ; 0 ; 1 ; 1 ; 1 ; 2 ; 2 ; 2

On tire simultanément au hasard deux boules du sac

1) Montrer que le nombre de cas possibles est 36

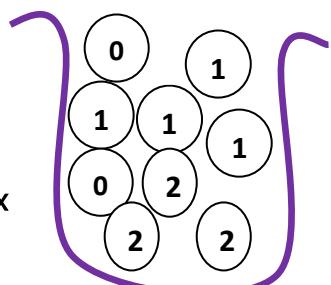
2) Soit X la variable aléatoire qui correspond à la somme des deux nombres portés par les deux boules tirées

a- Montrer que

b- Copier et compléter le tableau ci-contre en justifiant les réponses

c- Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ de la variable X

x_i	0	1	2	4
$p(X = x_i)$				



Exercice 03 : 1,5 points

On pose : $I = \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx$ et $J = \int_0^1 \frac{x^3}{x^2+1} dx$

- 1) Calculer I puis Calculer $I + J$
- 2) En déduire que $J = \frac{1}{2}(1 - \ln 2)$

Exercice 04 : 10 points

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie sur IR^* par :

$$f(x) = \left(\frac{x-1}{x} \right) e^x$$

1) a- Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis donner une interprétation géométrique au résultat obtenu.

b- Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ puis donner une interprétation géométrique au résultat obtenu.

c- Montrer que $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x)$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x)$ puis donner une interprétation géométrique au résultat obtenu.

2) a- Montrer que pour tout x de IR^* : $f'(x) = \frac{(x^2-x+1)}{x^2} e^x$

b- Montrer que : $f'(x) > 0$ pour tout x de IR^* .

c- En le sens de variation de f sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.

d- Calculer $f(1)$ puis dresser le tableau de variation sur f .

3) Dans la figure ci-dessous(Cf) est la courbe représentative de f dans le repère(o,i,j)

a- Donner l'équation de la tangente à au point d'abscisse 1.

b- Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation : $f(x) = 2$

c- Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation : $f(x) = -2$

