Exercice 01 : 4,5 points

Soit la suite Un définie par : $U_0 = 0 \quad et\ U_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + 1$

1) Calculer U_1 et U_2.
2) Montrer par récurrence pout tout n de IN : $U_n < \frac{5}{3}$.
3) a-Montrer que $U_{n+1} - U_n = -\frac{3}{5}\left(U_n - \frac{5}{3}\right)$

   b-Montrer que $(U_n)_{n\in IN}$ est une suite croissante et qu'elle est convergente.
4) On suppose que : $V_n = u_n - \frac{5}{3} \qquad \forall n \in IN$

   a- Calculer V_0

   b-Montrer que $V_n$est une suite géométrique de raison $\frac{2}{5}$.

   c- Calculer V_n en fonction de n et en déduire que $U_n = -\frac{5}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^n + \frac{5}{3}$

   d- Calculer la limite u_n en $+\infty$.

Exercice 02 : 4,5 points

Un sac contient 7 boules indiscernables au toucher : 3 boules rouges, 2 boules blanches et 2 boules vertes. On tire simultanément au hasard deux boules du sac

1) On considère les événements suivants :

   A: «les deux boules tirées sont de la même couleur»

   B «parmi les deux boules tirées, il y a une au moins qui est de couleur rouge»

a-Montrer que $p(A) = \frac{5}{21}$.

b-Calculer la probabilité de *B* .

c-Montrer que $p(A \cap B) = \frac{1}{7}$

d-Est-ce que les événements *A* et *B* sont indépendants ?justifier.

2) Soit *X* la variable aléatoire qui est égale au nombre de boules rouges tirées

   a-Copier et remplir le tableau ci-contre en justifiant les réponses

   b-calculer *E*(*X*) l'espérance mathématique de la variable *X*.

x_i	0	1	2
$p(X = x_i)$			

Exercice 03 : 11 points

Partie I :

On considère la fonction numérique g de la variable réelle x définie sur

$]0,+\infty[$ par : $g(x) = 1 - \frac{1}{x^2} + lnx$

1) a-Montrer que $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ b-calculer $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x) = -\infty$
2) a-Vérifier que pour tout x de $]0,+\infty[: g'(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^3}$

   b-Etudier le signe de $g'(x)$ sur $]0,+\infty[$

   c-calculer $g(1)$ puis dresser le tableau de variation de g sur $]0,+\infty[$.

   b-En déduire que $g(x) \leq 0$ sur $]0,1]$ et que $g(x) \geq 0$ sur $[1,+\infty[$

Partie II :

On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{x} + xlnx.$

1) a-Montrer que $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ et interpréter géométriquement le résultat

   b-Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis donner une interpréter géométriquement le résultat.
2) a- Montrer que : $f'(x) = g(x)$ pour tout x de $]0,+\infty[$.

   b-calculer $f(1)$ puis dresser le tableau de variations de f
3) Soit $F(x) = -\frac{x^2}{4} + \left(\frac{x^2}{2} + 1\right) lnx$

   Montrer que F est une primitive de f sur $]0,+\infty[$
4) dans la figure ci-dessous, est la courbe de et est la droite d'équation : $y = \frac{x}{2}$.

   - Calculer l'aire de la partie hachurée