Exercice 01 : 4,5 points

Soit la suite Un définie par : $\forall n \in IN$ $U_0 = 8$ et $U_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 3$

1) Calculer U_1 et U_2.
2) Montrer par récurrence pout tout n de IN : $U_n > 4$.
3) a-Montrer que $U_{n+1} - U_n = -\frac{3}{4}(U_n - 4)$

   b-Montrer que $(U_n)_{n\in IN}$ est une suite croissante et qu'elle est convergente.
4) On suppose que : $v_n = u_n - 4$ $\forall n \in IN$

   a- Calculer V_0

   b-Montrer que V_n est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$.

   c- Calculer V_n en fonction de n et en déduire que $U_n = 4\left(\frac{1}{4}\right)^n + 4$.

   d- Calculer la limite u_n en $+\infty$.

Exercice 02: 11 points

PARTIE I :

On considère la fonction numérique g de la variable réelle x définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$g(x) = x - 1 - lnx$$

1) Montrer que pour tout x de $]0,+\infty[$: $g'(x) = \frac{x-1}{x}$
2) Etudier le signe de $g'(x)$ pour tout x de $]0,+\infty[$.
3) Calculer $g(1)$ Dresser le tableau de variation de g (Le calcul de limites n'est pas demander)
4) En déduire que $g(x) \geq 0$ pour tout x de $]0,+\infty[$.

PARTIE II :

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$f(x) = x^2 - 1 - 2xlnx$$

1) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ puis donner une interprétation géométrique au résultat obtenu.
2) a-Vérifier que pour tout x de $]0,+\infty[$: $f(x) = x^2\left(1 - \frac{1}{x^2} - \frac{2lnx}{x}\right)$

2) b-Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis donner une interprétation géométrique.

1) a- Montrer que pour tout $\mathbf{x}$ de $]0,+\infty[$: $f'(x) = 2.g(x)$.

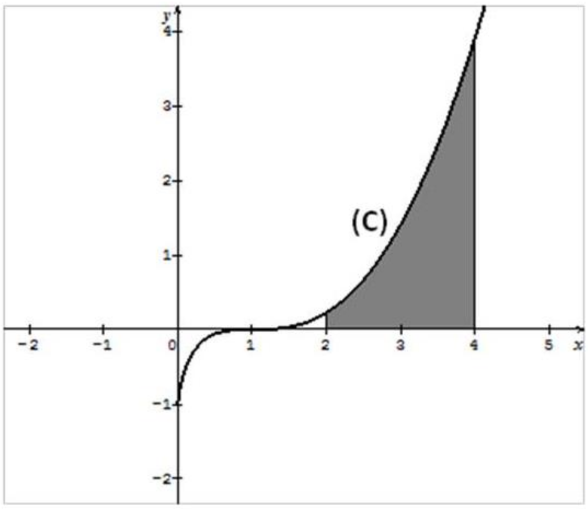
b-dresser le tableau de variation de f.

2) Montrer que (C_f) admet un point d'inflexion I qu'on déterminera.

3) a- en utilisant une intégration par parties, montrer que :

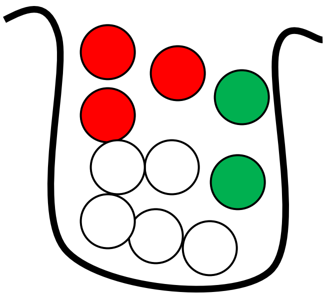
$$\int_2^4 2x.\ln x\,dx = 28\ln 2 - 6$$

b- calculer l'air de la partie hachurée



Exercice 03: 4.5 points

Un sac contient 10 boules indiscernables au toucher : 3 boules rouges, 5 boules blanches et 2 boules vertes.



On tire simultanément au hasard trois boules du sac.

1) montrer que le nombre de tirages possibles est : 120

2) On considère les événements suivants :

A: «les deux boules tirées sont de la même couleur»

B «parmi les deux boules tirées, il y en a une au moins qui est de couleur blanche»

a- Montrer que $p(A) = \frac{11}{120}$.

b- Calculer $p(B)$

3) soit X la variable aléatoire qui est égale au nombre de boules vertes tirées

Copier et remplir le tableau ci contre en justifiant les réponses

x_i	0	1	2
$p(X = x_i)$			