

**Exercise 01 : 4,5 points**

Soit la suite  $U_n$  définie par :

$$U_0 = 1 \text{ et } U_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + 1$$

- 1) Calculer  $U_1$  et  $U_2$ .
- 2) Montrer par récurrence pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$  :  $U_n < \frac{5}{4}$
- 3) a- Montrer que  $U_{n+1} - U_n = -\frac{4}{5}\left(U_n - \frac{5}{4}\right)$   
b- Montrer que  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite décroissante et qu'elle est convergente.
- 4) On suppose que :  $V_n = U_n - \frac{5}{4} \quad \forall n \in \mathbb{N}$   
a- Calculer  $V_0$   
b- Montrer que  $V_n$  est une suite géométrique de raison  $\frac{1}{4}$ .  
c- Calculer  $V_n$  en fonction de  $n$  et en déduire que  $U_n = \frac{1}{4}\left(5 - \left(\frac{1}{5}\right)^n\right)$ .  
d- Calculer la limite  $u_n$  en  $+\infty$ .

**Exercise 02 : 11 points**

On considère la fonction numérique  $f$  de la variable réelle  $x$  définie sur  $]0, +\infty[$  par :  $f(x) =$

$$x + \frac{2}{x} + \ln x$$

- 1) a- Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$   
b- Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$  et que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x]$  s donner une interprétation géométrique.
- 2) a- Vérifier que  $f(x) = x + \frac{2+x \ln x}{x}$  pour tout  $x$  de  $]0, +\infty[$   
b- Calculer  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x)$  ; donner une interprétation géométrique.
- 3) a- Calculer  $f'(x)$  pour tout  $x$  de  $]0, +\infty[$ .  
b- Vérifier que  $f'(x) = \frac{(x-1)(x+2)}{x^2}$  et étudier le signe de  $(x-1)(x+2)$  sur les deux intervalles  $]0, 1]$  et  $[1, +\infty[$ .

c- En déduire que  $f$  est une fonction décroissante sur intervalle

$]0, 1]$  et qu'elle est croissante sur  $[1, +\infty[$ .

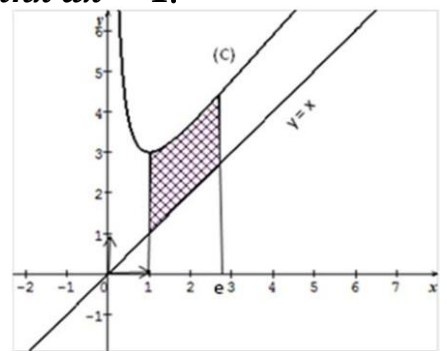
d-dresser le tableau de variation de  $f$ .

4) a- Vérifier que  $f''(x) = \frac{4-x}{x^3}$  pour tout  $x$  de  $]0, +\infty[$ .

b- Etudier le signe de  $f''(x)$  pour tout  $x$  de  $]0, +\infty[$  puis en déduire que (C) admet un point d'inflexion I dont on déterminera ses coordonnées.

5) a- En utilisant une intégration par parties, montrer que  $\int_1^e \ln x \, dx = 1$ .

b- En déduire l'aire de la partie hachurée dans la figure.



### Exercice 03 : 4.5 points

Un sac contient 8 boules indiscernables au toucher : 5 boules rouges et 3 boules vertes

On tire simultanément au hasard deux boules du sac

1) montrer que le nombre de tirages possibles est : 28

2) On considère les événements suivants :

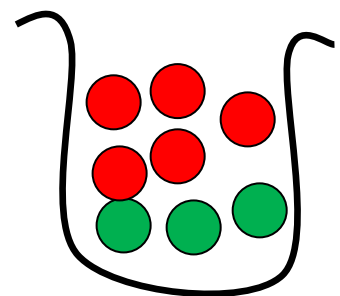
A: «les deux boules tirées sont de la même couleur»

B «les deux boules tirées sont de couleurs différentes»

3) montrer que  $p(A) = \frac{13}{28}$

4) soit  $X$  la variable aléatoire qui est égale au nombre de boules

vertes tirées, montrer que  $p(X = 0) = \frac{10}{28}$



|              |   |   |   |
|--------------|---|---|---|
| $x_i$        | 0 | 1 | 2 |
| $p(X = x_i)$ |   |   |   |