Problème :

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{3e^x-1}{e^x+1}$ et (Cf) sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (l'unité de mesure est 1 cm)

Partie A:

1. Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}$; $f(x)+f(-x)=2$. puis en déduire le centre de symétrie de la courbe (Cf)
2. Calculer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$ puis en donner des interprétations aux résultats obtenus
3. Etudier le sens de variation de f
4. Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe (Cf) au point d'abscisse 0
5. On pose $g(x)=f(x)-(x+1)$.

   Vérifier que $\forall x\in\mathbb{R}$; $g'(x)=-\left(\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2$
6. Calculer $g(0)$ puis déterminer le signe de $g(x)$
7. En déduire la position relative de la courbe (Cf) par rapport à la tangente (T)
8. Construire la tangente (T) et la courbe (Cf) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

Partie B:

1. a) Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}$: $f(x)=x\Leftrightarrow g(x)+1=0$

   b) En déduire que la droite (D) d'équation $y=x$ coupe la courbe (Cf) en un point d'abscisse α tel que $2<\alpha<3$
2. a) Vérifier que $f(x)=-1+\dfrac{4e^x}{e^x+1}$ puis en déduire une primitive de f sur $\mathbb{R}$

   b) Calculer l'aire de la surface du plan délimitée par la courbe (Cf) et les droites d'équations respectivement $x=-2$, $x=2$ et $y=x$

Partie C:

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0=3$ et $\forall n\in\mathbb{N}$; $u_{n+1}=f(u_n)$

1. Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$; $1\le u_n\le 3$
2. Montrer que (u_n) est une suite monotone. puis en déduire qu'elle est convergente
3. Montrer que $\lim(u_n)=\alpha$

Exercice :

1. En utilisant une intégration par partie. Montrer que :

   $a)$ $\displaystyle\int_0^1(2x-1)e^{2x}dx=1$ $\qquad$ $b)$ $\displaystyle\int_0^1\frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}dx=\frac{2-\sqrt{2}}{3}$
2. On se propose de déterminer la valeur de l'intégrale $I=\displaystyle\int_{-1}^0\frac{x^3+4x^2+4x-6}{x^2+x-2}dx$

   a. Par une division euclidienne, montrer que $x^3+4x^2+4x-6=(x^2+x-2)(x+3)+3x$

   b. Trouver deux réels a et b tels que $\dfrac{3x}{x^2+x-2}=\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{b}{x+2}$

   c. En déduire la valeur de I