

Exercice 1 (4 points)

- 1) Répondre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes
- a) $(3x-2) \cdot \ln x = 0$ b) $(x^2 - x - 6)(1 - \ln x) = 0$
- 2) Répondre dans $\mathbb{R}$, les inéquations suivantes.
- a) $(x-2) \cdot \ln x \leq 0$; b) $\frac{3-x}{\ln x} \leq 0$.

Exercice 2 (8 points)

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \frac{5u_n - 4}{u_n + 1}$ ($n \in \mathbb{N}$)

- 1) a) Calculer u_1 et vérifier que $(\forall n \in \mathbb{N}) u_{n+1} - 2 = 3 \frac{(u_n - 2)}{u_n + 1}$
- b) Démontrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) u_n > 2$.
- c) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) u_{n+1} - u_n = -\left(\frac{u_n - 2}{u_n + 1}\right)^2$ puis déterminer la monotonie de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$.
- d) Dédurre que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est convergente.
- 2) On pose : $(\forall n \in \mathbb{N}) v_n = \frac{1}{u_n - 2}$
- a) Démontrer que la suite $(v_n)_{n \geq 0}$ est arithmétique de raison $r = \frac{1}{3}$ en donnant son premier terme v_0 .
- b) Écrire v_n en fonction de n .
- c) Dédurre que $(\forall n \in \mathbb{N}) u_n = \frac{2n+9}{n+3}$ puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.
- 3) Calculer en fonction de n la somme $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$.

Exercice 3 (8 points)

On considère la fonction f définie sur $I =]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = x^2 + 1 + 2 \ln x$$

- 1) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et interpréter géométriquement le résultat obtenu.
- b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$. Interpréter géométriquement ce dernier résultat.

- 1 2) a) Montrer que $(\forall x \in I) \quad f'(x) = 2\left(x + \frac{1}{x}\right)$ puis étudier que f est strictement croissante sur I .
- 1 b) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution α dans $]0,5; 0,6[$.
- 1 3) a) Montrer que $(\forall x \in I) \quad f''(x) = 2\left(\frac{x^2 - 1}{x^2}\right)$
- 1 b) Étudier la concavité de la courbe (C_f) en donnant les coordonnées de son point d'inflexion A .
- 1 c) Écrire l'équation de la tangente à (C_f) au point d'abscisse 1.
- 0,5 d) Résoudre dans I , l'inéquation $f(x) \leq 0$.