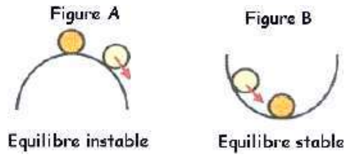
Pendule Elastique

Résumé:15 | Niveaux:SM PC SVT

Oscillateur mécanique : Tout mobile qui effectue un mouvement de va et viens autours de sa position d'équilibre stable

Nous déplaçons légèrement la bille de sa position d'équilibre,

- **La figure A :** elle se met à rouler et ne reviendra pas à sa position de départ. L'équilibre est instable.
- **La figure B :** elle revient dans sa position de départ. L'équilibre est dit stable.



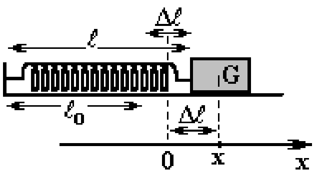
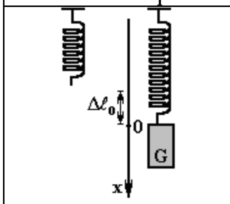
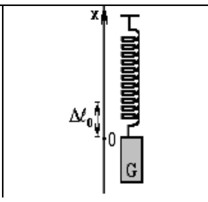
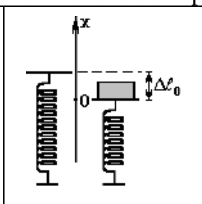
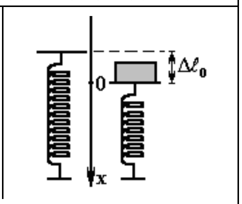
I.Pendule Elastique

Un pendule élastique, ou **système solide-ressort,** est constitué d'un solide, de masse m , fixé à un ressort ,de longueur initiale ℓ_0 et de raideur K, dont l'autre extrémité est attachée à un point fixe.

1. La Tension de ressort

T=K.Δℓ	**Δℓ= ℓ - ℓ₀**	**ℓ₀**	**K**
Tension du ressort (N)	Allongement du ressort (m)	Longueur initiale ℓ_0 **(m)**	Raideur du ressort (N/m)

Expression de Δℓ

<table>
<tr><td rowspan="3">Ressort horizontal

Ressort horizontal initialement non allongé et fixé directement au mobile ou au moyen d'un fil inextensible et de masse négligeable
Δℓ=x</td><td colspan="4">Ressort vertical ou incliné
On admet que le mouvement du solide est dans le sens positif et on conclut</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Δℓ = ℓ - ℓ₀
Si le ressort s'allonge alors Δℓ= Δℓ₀+x | Si le ressort se compresse alors Δℓ= Δℓ₀-x</td><td colspan="2">Δℓ = ℓ₀ - ℓ
Si le ressort s'allonge alors Δℓ= Δℓ₀-x | Si le ressort se compresse alors Δℓ= Δℓ₀+x</td></tr>
</table>

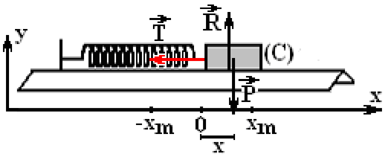
2. Equation différentielle :

Un solide, de masse m sur un banc à coussin d'air horizontal, fixé à un ressort à spires non jointives, de longueur initiale ℓ_0 et de raideur K,

Système : Solide (C)

Bilan des forces :

- $\vec{T}$: Tension du ressort
- $\vec{R}$: Réaction du plan horizontal
- $\vec{P}$: Poids du corps (C)



En appliquant la 2eme loi de Newton : $\sum \vec{F} = m.\vec{a}_G$

$$\vec{T} + \vec{R} + \vec{F} = m.\vec{a}_G$$

$$\vec{T}\begin{pmatrix} T_x = -T \\ T_y = 0 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{P}\begin{pmatrix} P_x = 0 \\ P_y = -P = -m.g \end{pmatrix} \text{ et } \vec{R}\begin{pmatrix} R_x = 0 \\ R_y = R \end{pmatrix} \text{ et } \vec{a}_G\begin{pmatrix} a_x = \ddot{x} \\ a_y = 0 \end{pmatrix}$$

Sur l'axe Ox : $T_x+R_x+P_x=m.a_x$

$$-T = m.\ddot{x} \text{ et } -K.\Delta\ell = m.\ddot{x} \text{ et } -K.x = m.\ddot{x} \text{ d'où } -\frac{K}{m}.x = \ddot{x}$$

donc $\ddot{x} + \frac{K}{m}.x = 0$: Equation différentielle de mouvement du centre d'inertie G

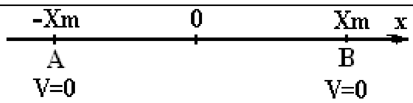
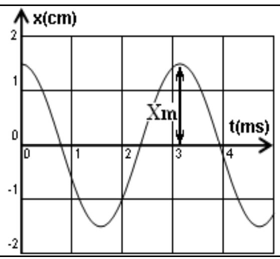
L'équation différentielle est de la forme $\ddot{x} + \omega_0^2.x = 0$ avec $\omega_0^2 = \frac{K}{m}$ ou bien $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$ **(en rad/s)**

3. Equation horaire ou la solution de l'equation différentielle :

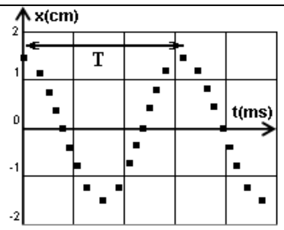
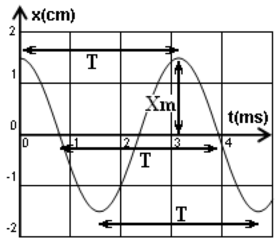
$x = x(t) = Xm.\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}.t + \varphi\right)$ **ou bien** $x=x(t)=X_m.\cos(\omega_0.t+\varphi)$ $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$	avec	**x(t)** : l'abscise (élongation) du point G et varie entre Xm et -Xm X_m : Amplitude ou élongation maximale ω_0 : pulsation (rad/s) T_0 : la période (s) $\omega_0.t+\varphi$: Phase à l'instant t φ : Phase à l'origine des temps t=0

Déterminer les constantes X_m , T_0 et φ :

⁂ Comment déterminer Xm

1. **Phrase**	 - On écarte le corps de 2cm de sa position d'équilibre et on le libère sans vitesse initiale **Xm=2cm** - Le corps oscille entre deux points A et B distante de AB=4cm **Xm = 2cm** d'où AB = 2.Xm = 4cm
2. **Graphiquement**	2.1. **Par rapport à l'axe temps**  **Xm=1.5cm**

⁂ Comment déterminer la période propre T_0

3. **Enregistrement**	 τ : la durée entre l'enregistrement de deux points successifs **T=16.τ**
4. **Graphiquement x=f(t)**	 Attention à la lecture et à l'échelle T_0=3.2ms

⁂ Comment déterminer la phase à l'origine φ

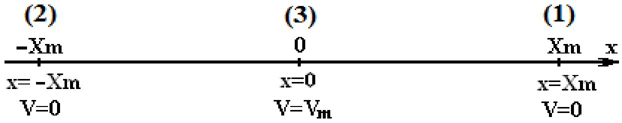
$\mathbf{x = x(t) = Xm.\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}.t+\varphi\right)}$: l'équation horaire $\mathbf{V_x = \dot{x}(t) = -Xm.\frac{2\pi}{T_0}.\sin\left(\frac{2\pi}{T_0}.t+\varphi\right)}$

: l'expression de la composante du vecteur vitesse $\mathbf{V_x}$ et $\mathbf{\sin\left(\frac{2\pi}{T_0}.t+\varphi\right)}$ sont opposées (ont des signes différants)

$\mathbf{x_0 = x(0) = Xm.\cos(\varphi)}$ d'où $\mathbf{\cos(\varphi) = \frac{x(0)}{Xm}}$ à l'instant t= 0 $\mathbf{V_{0x} = V(0) = \dot{x}(0) = -Xm.\frac{2\pi}{T_0}.\sin(\varphi)}$

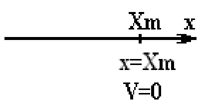
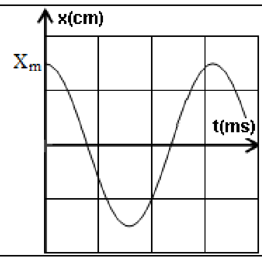
$\mathbf{V_x}$ à l'instant t=0 et $\mathbf{\sin(\varphi)}$ sont opposées (ont des signes différants) On en conclut que $\mathbf{V_x}$ à l'instant t=0 et $\boldsymbol{\varphi}$ sont opposées aussi

En comparant le sens de mouvement avec le sens positif de l'axe, on détermine le signe de $\mathbf{V_x}$ la composante de la vitesse et on en déduit le signe de la phase $\boldsymbol{\varphi}$



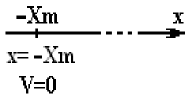
1er cas :

(1) On écarte le corps, dans le sens positif, de Xm de sa position d'équilibre et on le libère sans vitesse initiale à un instant considéré comme origine des temps

	$x(0) = X_m$ $\mathbf{\cos(\varphi) = \frac{x(0)}{Xm} = 1}$ d'où $\mathbf{\varphi = 0}$	

2em cas :

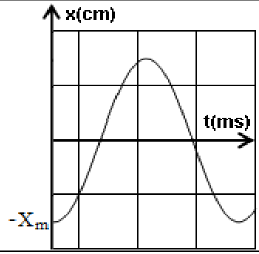
(2) On écarte le corps, dans le sens négatif, de Xm de sa position d'équilibre et on le libère sans vitesse initiale à un instant considéré comme origine des temps



$x(0) = -X_m$

$$\cos(\varphi) = \frac{x(0)}{Xm} = 1$$

d'où $\varphi = \pi$



4. Expression de la période propre T_0 :

$$x = x(t) = Xm.\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}.t + \varphi\right) \text{ : l'équation horaire}$$

On dérive deux fois par rapport au temps t :

$$\dot{x} = -x_m\frac{2\pi}{T_0}.sin\left(\frac{2\pi}{T_0}.t+\varphi_0\right) \quad \ddot{x} = -x_m\frac{4\pi^2}{T_0^2}.cos\left(\frac{2\pi}{T_0}.t+\varphi_0\right) = -\frac{4\pi^2}{T_0^2}.x \qquad \ddot{x}+\frac{4\pi^2}{T_0^2}.x = 0$$

On compare cette expression avec l'équation différentielle , on déduit que pour que soit une solution de l'équation différentielle ,

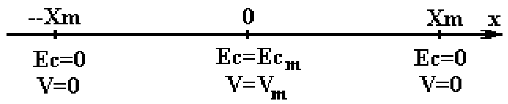
$$x(t) = x_m cos\left(\frac{2\pi}{T_0}.t+\varphi_0\right) \quad \text{il suffit que} \quad \frac{4\pi^2}{T_0^2} = \frac{K}{m} \qquad \boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}}$$

II. Etude Energitique

Energie du système est la somme des énergies de ses composantes

1. Energie cinétique :

$$x = Xm.\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}.t+\varphi\right) \quad \text{et} \quad V_x = -Xm.\frac{2\pi}{T_0}.\sin\left(\frac{2\pi}{T_0}.t+\varphi\right) \quad \text{et} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{K}{m}} \qquad Ec = \frac{1}{2}m.V^2$$



- Si x=Xm ou x=-Xm alors l'énergie cinétique est nulle donc la vitesse est nulle et l'oscillateur s'arrête et change le sens de son mouvement
- Si x= 0 alors l'oscillateur passe par sa position d'équilibre et son énergie cinétique est maximale et sa vitesse l'est aussi

2. Energie potentielle :

L'énergie potentielle (de position), définie à une constante arbitraire près, ne dépend que de la position du corps dans l'espace.

❖ Energie potentielle élastique Ep_e	❖ Energie potentielle de pesanteur Ep_p
$Ep_e = \frac{1}{2}.K.\Delta\ell^2 + C$ La constante C est déterminé à partir d'un cas référentiel de l'énergie potentielle Ep_e=0 Si le pendule élastique est horizontal alors $\Delta\ell$ =x alors $Ep_e = \frac{1}{2}.K.x^2 + C$ On considère le plan vertical passant par la position d'équilibre comme repère de l'énergie potentielle élastique x=0 et Ep_e =0 d'où C=0 alors $Ep_e = \frac{1}{2}.K.x^2$	Ep_p=m.g.Z.+C La constante C est déterminé à partir d'un cas référentiel de l'énergie potentielle Ep_p =0 On considère le plan vertical passant par la position d'équilibre comme repère de l'énergie potentielle élastique z=0 et Ep_p=0 d'où C=0 alors **Ep_p=m.g.Z** **NB :** Pour un pendule élastique horizontal Ep_p=0

Conclusion : $Ep = \frac{1}{2}.K.x^2$

$$\text{On a } x = Xm.\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}.t+\varphi\right) \text{ alors } Ep = \frac{1}{2}K.Xm^2.\cos^2\left(\frac{2\pi}{T_0}.t+\varphi\right)$$

3. Expresion de la variation de l'énergie potentielle :

ΔEp_e : Variation de l'énergie potentielle élastique	ΔEp_p : Variation de l'Energie potentielle de pesanteur
$\Delta Ep_e = \frac{1}{2}.K.(\Delta\ell_2^2 - \Delta\ell_1^2) = -W_{1\to2}(\vec{T})$	$\Delta Ep_p = m.g.(Z_2 - Z_1) = -W_{1\to2}(\vec{P})$

4. Energie mécanique :

L'énergie mécanique est la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle, Em = Ec + Ep

$\mathbf{Em} = \frac{1}{2}.\mathbf{m}.\mathbf{V}^2 + \frac{1}{2}.\mathbf{K}.\mathbf{x}^2 + \mathbf{C}$: Pour les conditions décrites avant on peut écrire $\mathbf{Em} = \frac{1}{2}.\mathbf{m}.\mathbf{V}^2 + \frac{1}{2}.\mathbf{K}.\mathbf{x}^2$

5. Le cas du pendule élastique incliné ou verctical

X : la distance que parcours le corps sur le plan incliné et elle constitue l'hypoténuse du triangle

Les deux axes sont opposés et

$Z = - X.\sin(\alpha)$

NB : si on change l'orientation de l'axe z

- L'expression de l'énergie potentielle varie

  $Ep_p = Ep_p(Z) = - m.g.Z.+ C$
- La relation entre abscisse varie aussi

  $Z = X.\sin(\alpha)$

1. $Ep_p = Ep_p(Z) = m.g.Z.+ C$
2. Déterminer l'expression de la constante C
   - Déterminer le plan horizontal référentielle de l'énergie potentielle Epp=0
   - Déterminer l'abscisse correspondant Z_0

   $Z = Z_0$ et $Ep_p(Z_0) = 0$

   D'ou

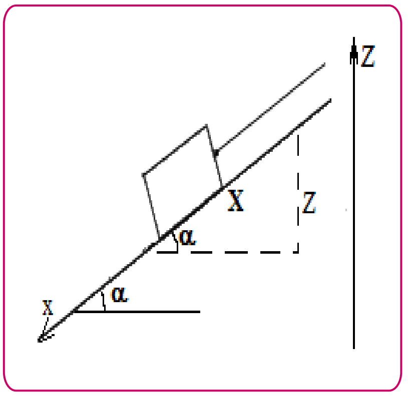
   $Ep_p(Z_0) = m.g.Z_0.+C=0$

   donc

   $C = - m.g.Z_0$
3. On remplace C par son équivalent et on obtient alors

   $Ep_p = Ep_p(Z) = m.g.Z - m.g.Z_0$

   $Ep_p = Ep_p(Z) = m.g.(Z - Z_0)$



Energie potentielle élastique

1. $Ep_e = \frac{1}{2}.K.\Delta\ell^2 + C$

Déterminer l'expression de $\Delta\ell$ en fonction de x soit $\Delta\ell=\Delta\ell_0+x$

2. Déterminer la constante C
   - Déterminer le plan référentiel de l'Energie potentielle $Ep_e=0$
   - Déterminer l'abscisse correspondant x_0

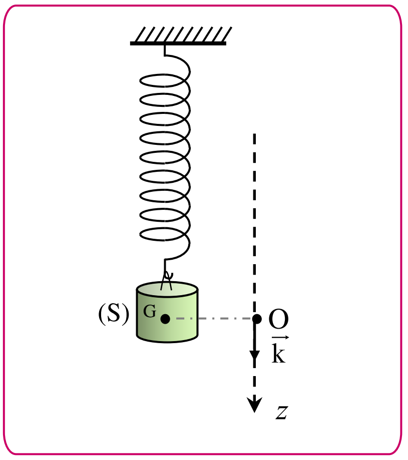
   $x = x_0$ et $Ep_e(x_0) = 0$

   D'où $Ep_e(x_0) = \frac{1}{2}.K.(\Delta\ell_0 + x_0)^2 + C = 0$

   Donc $C = -\frac{1}{2}.K.(\Delta\ell_0 + x_0)^2$

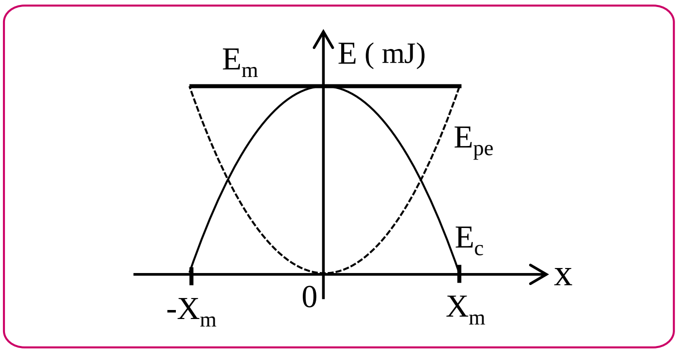
3. Remplacer dans l'expression de Ep_e

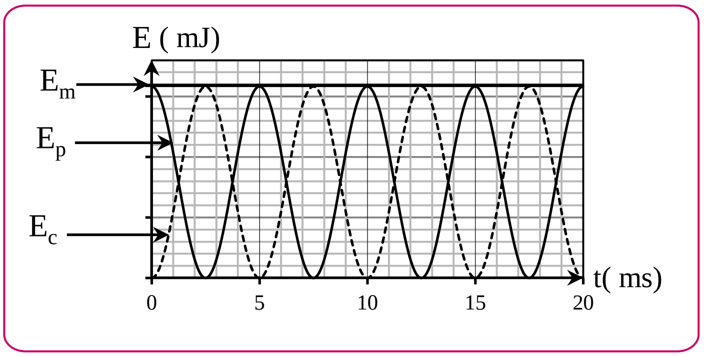
$$\mathbf{Ep_e} = \frac{1}{2}.\mathbf{K}.\boldsymbol{\Delta\ell^2} + \mathbf{C} = \frac{1}{2}.\mathbf{K}.(\boldsymbol{\Delta\ell_0} + \mathbf{x_0})^2 + \mathbf{C}$$



6. Les graphes d'energies :

- Au point x=Xm on a $Em=Ep_{max}$
- Au passage par la position d'equilibre x=0 on a $Em=Ec_{max}$





T_0 = 2.Te : La période des oscillations T_0 est le double de la période des énergies Te

NB :

S'il existe frottement alors l'amplitude des oscillations diminue par dissipation (perte) de l'énergie mécanique au cours du temps