Zakaryae Chriki

Pendule de Torsion

Résumé:16 | Niveaux:SM PC

I.Pendule de Torsion

Un pendule de torsion est un dispositif constitué d'une barre horizontale, fixée à un support par l'intermédiaire d'un fil métallique.

1. Le moment du couple :de torsion

Le moment du couple de torsion qu'exerce un fil tordu est indépendant de l'axe de rotation , il a pour expression : $\boxed{\mathscr{M} = -C.\theta}$

C : la constante de torsion du fil (N.m/rad)

θ : angle de torsion (rad)

$\mathscr{M}$: moment du couple de torsion (N.m)

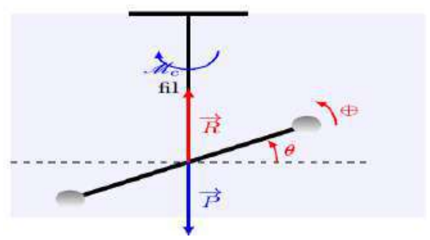
Remarques :

* Le signe négatif signifie que le couple de torsion est un couple de rappel ;

* La constante de torsion du fil dépend de la longueur du fil , de la section et de sa nature.

2. Equation différentielle :

On étudie le mouvement du système dans un référentielle terrestre supposé Galiléen . On repère les position de la tige à chaque instant par l'abscisse angulaire $\theta(t)$ mesuré à partir de la direction de la tige à l'équilibre . (Direction de référence)



La tige est soumise à des forces suivantes :

* le poids $\vec{P}$

* la force $\vec{R}$ exercée par le fil

* du couple de torsion de moment $\mathscr{M}_c = -C.\theta$

On applique la relation fondamentale de la dynamique de rotation au système : $\Sigma\mathscr{M}_\Delta(\vec{F_{ext}}) = J_\Delta.\ddot{\theta}$

$\mathscr{M}_\Delta(\vec{P}) + \mathscr{M}_\Delta(\vec{R}) + \mathscr{M}_c = J_\Delta.\ddot{\theta}$ Les droites d'actions de $\vec{P}$ et $\vec{R}$ sont confondues avec l'axe Δ ; donc $\mathscr{M}_\Delta(\vec{P}) = 0$ et $\mathscr{M}_\Delta(\vec{R}) = 0$

$-C.\theta = J_\Delta.\ddot{\theta}$ $\boxed{\ddot{\theta} + \frac{C}{J_\Delta}.\theta = 0}$ C'est l'équation différentielle du mouvement du pendule .

En absence des frottements , labscisse angulaire de la tige d'un pendule de torsion libre , vérifie l'équation différentielle suivante :

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{C}{J_\Delta}.\theta = 0}$$

3. Equation horaire ou la solution de l'equation différentielle :

La solution de cette équation différentielle est de la forme : $\boxed{\theta(t) = \theta_m cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi_0\right)}$

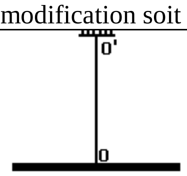
θ_m est l'amplitude des oscillations (rad) , φ_0 est la phase à l'origine des dates (rad) et T_0 la période propre du pendule de torsion .

❖ **Expression de T_0 en fonction du moment d'inertie J_Δ**

$J_\Delta = \Sigma m_i.r_i^2$:
- Moment d'inertie de la barre par rapport à l'axe (Δ)
- Exprime la répartition de la matière autours de l'axe (Δ)
- S'exprime en Kg.m²

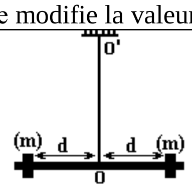
NB :

Toute modification soit de la masse ou de sa position par rapport à l'axe modifie la valeur J_Δ



$J_0 = \Sigma m_i.r_i^2$

$$T_0 = 2\pi.\sqrt{\frac{J_\Delta}{C}}$$

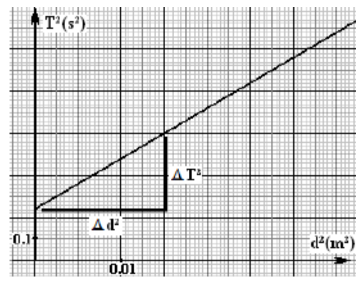


On fixe deux masselottes identiques de masses m de part et d'autres de l'axe à une distance d

$J_\Delta = \Sigma m_i.r_i^2 = J_0 + 2.m.d^2$

$$T_0 = 2\pi.\sqrt{\frac{J_\Delta}{C}} = 2\pi.\sqrt{\frac{J_0 + 2.m.d^2}{C}}$$

⁂ Exploiter la courbe T²=f(m) ou T²=f(d²)



On a $T_0 = 2\pi.\sqrt{\frac{J_0+2.m.d^2}{C}}$ alors $T_0^2 = 4\pi^2.\frac{J_0}{C} + 8\pi^2.\frac{m.d^2}{C}$ m=50g Masse de la masselotte

$T_0^2 = 4\pi^2.\frac{J_0}{C} + 8\pi^2.\frac{m.d^2}{C}$ La courbe T²=f(d²) est une fonction affine donc T² = A.d² + B avec :

- $A = 8\pi^2.\frac{m}{C} = \frac{\Delta T_0^2}{\Delta d^2} = \frac{0.36}{0.015} = 24\ s^2/m^2$, on en déduit C , $C = 8\pi^2.\frac{m}{A}$
- $B = 4\pi^2.\frac{J_0}{C} = 0.24\ s^2$, on en déduit J_0 , $J_0 = \frac{B.C}{4\pi^2}$

II. Etude Energitique

Energie du système est la somme des énergies de ses composantes

1. Energie cinétique :

On considère un pendule de torsion formé d'un fil métallique léger auquel est fixé une tige dense . Soit J_Δ le moment d'inertie de la tige par rapport à l'axe de rotation matérialisé par le fil métallique et $\dot{\theta}$ est la vitesse angulaire de la tige à instant t . On définit l'énergie cinétique du système qu'est en rotation autour de Δ, à cet instant t par l'expression suivante : $\boxed{E_c = \frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}^2}$

$$\theta = \theta m.\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}.t+\varphi\right) \quad \text{et} \quad \dot{\theta} = -\theta m.\frac{2\pi}{T_0}.\sin\left(\frac{2\pi}{T_0}.t+\varphi\right) \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{C}{J_\Delta}}$$

$$Ec = \frac{1}{2}.J_\Delta\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}.J_\Delta\left(-\theta m.\frac{2\pi}{T_0}.\sin\left(\frac{2\pi}{T_0}.t+\varphi\right)\right)^2 = \frac{1}{2}.C(\theta_m^2-\theta^2)$$

- Si θ = θm ou θ =- θm alors l'énergie cinétique est nulle donc la vitesse est nulle et l'oscillateur s'arrête et change le sens de son mouvement
- Si θ = 0 alors l'oscillateur passe par sa position d'équilibre et son énergie cinétique est maximale et sa vitesse l'est aussi

2. Energie potentielle de torsion

L'énergie potentielle de torsion d'un pendule de torsion est définie par la relation : $\boxed{E_{pt} = \frac{1}{2}C\theta^2 + Cte}$

Avec C la constante de la torsion du pendule , θ angle de torsion en rad et Cte une constante qui dépend du choix de l'état de référence fourni par les conditions initiales . En générale , on prend $E_{pt} = 0$ pour $\theta = \theta_0 = 0$; soit Cte=0 d'où $E_{pt} = \frac{1}{2}C\theta^2$

$$Ep_t = \frac{1}{2}.C.\theta^2 = \frac{1}{2}.C.\left(\theta m.\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}.t+\varphi\right)\right)^2 = \frac{1}{2}.C.\theta_m^2.\cos^2\left(\frac{2\pi}{T_0}.t+\varphi\right)$$

3. Expresion de la variation de l'énergie potentielle de torsion :

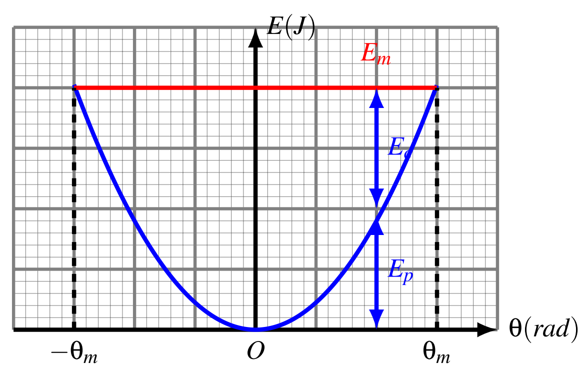
ΔEp_t : Variation de l'énergie potentielle de torsion $\Delta Ep_t = \frac{1}{2}.C.(\theta_2^2 - \theta_1^2) = -W_{1\to2}(\mathcal{M}_c)$

4. Energie mécanique :

On définit l'énergie mécanique d'un pendule de torsion par la relation suivante : $\boxed{E_m = \frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}C\theta^2 + Cte}$

Dans le cas où $Cte = 0$ on a alors : $\boxed{E_m = \frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}C\theta^2}$

5. Diagramms d'énergie d'un penddule de trosion :



Lorsque la tige passe par sa position d'équilibre : $\theta = 0$ et $\dot{\theta} = \pm\dot{\theta}_m$ soit $E_{pt} = 0$ et $E_c = \frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}_m^2$

Lorsque la tige passe par ses positions extrêmes : $\theta = \pm\theta_m$ et $\dot{\theta} = 0$

$E_{pt} = \frac{1}{2}C\theta_m^2$ et $E_c = 0$

L'énergie mécanique d'un pendule de torsion libre et amorti se conserve : $E_m \frac{1}{2}C\theta_m = \frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}_m^2 = Cte$