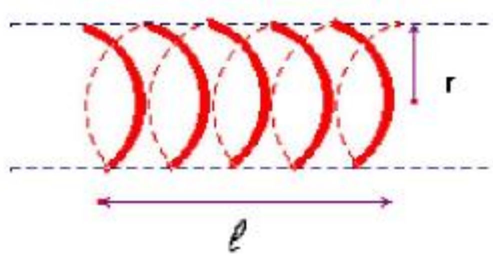
Circuit RL

I- La bobine.

- Une bobine est constituée d'un enroulement de fil conducteur, recouvert d'un vernis isolant, sur un cylindre derayon r.

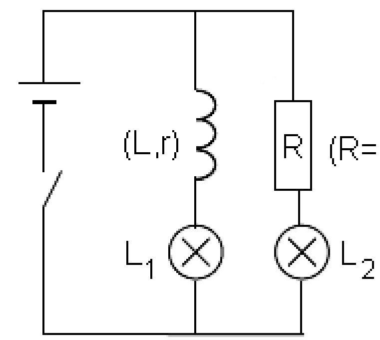


ℓ la longueur de l'enroulement et par r le rayon d'une spire :

- Si L est petit devant r, la bobine est plate.
- Si L est voisin de r la bobine est appelée : solénoïde.
- Si L est plus grand que 10 r, le solénoïde est dit infini.

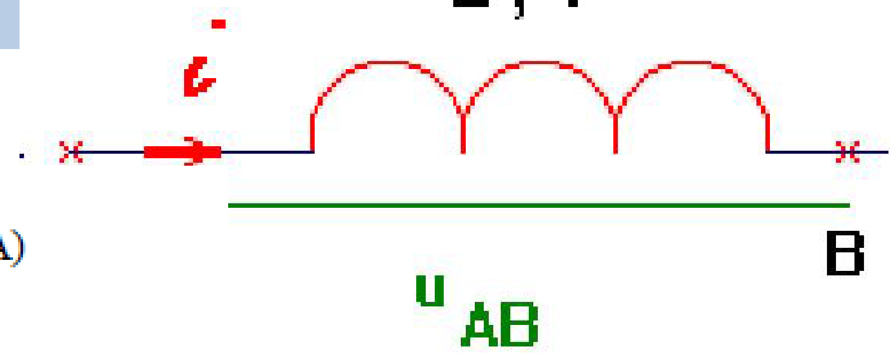
II) Influence d'une bobine dans un circuit

- Expérience 1 : Retard à l'établissement du courant



- Observations : La lampe L 1 s'allume avec un retard sur la lampe L 2.
- Il se produit un retard à l'établissement du courant dans la portion de circuit qui comporte la bobine.
- Une bobine s'oppose transitoirement à l'établissement du courant dans un circuit.
- En régime permanent, la bobine se comporte comme un conducteur ohmique de résistance r.

Expression de la tension aux bornes d'une bobine



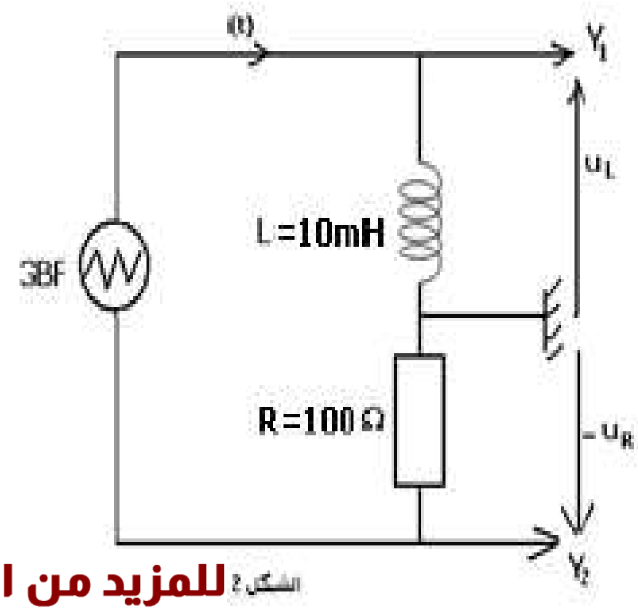
En convention récepteur

$$u_{AB} = L\,.\frac{di}{dt} + r\,.\,i \quad \begin{cases} I \text{ intensité en ampère (A)} \\ r \text{ résistance en ohm } (\Omega) \\ L \text{ inductance en henry (H)} \end{cases}$$

- Remarque : cas d'une bobine idéale (r = 0) $u_{AB} = L\dfrac{di}{dt}$

En régime permanent (i = constante) $\dfrac{di}{dt} = 0$ $u_{AB} = ri$

Expérience 2 : Réponse à une tension triangulaire



Le GBF applique une tension triangulaire.

Sur Y2 on visualise a l'oscilloscope la tension au borne de R
Et donc l'évolution du courant car $u_R=Ri$

Sur Y1 on visualise la tension au borne de la bobine

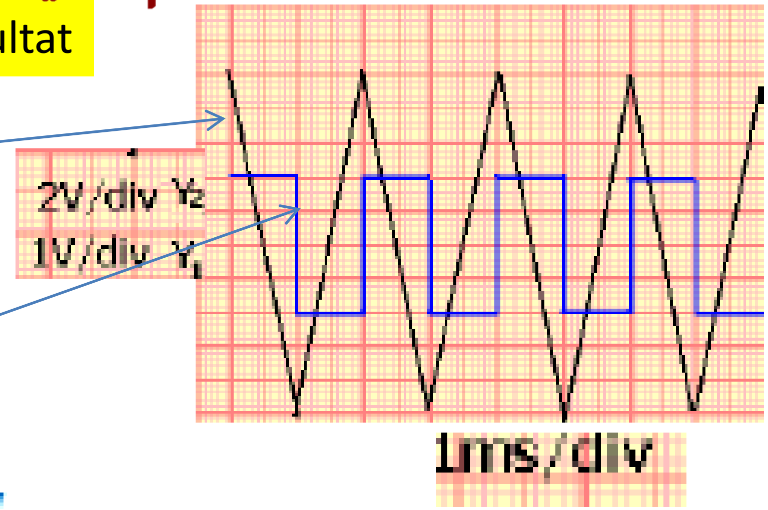
$$i(t)=\frac{-u_R}{R}=\frac{a't+b'}{R}=at+b$$

$$a=\frac{a'}{R}=\frac{\Delta u}{R.\Delta t}=\frac{-10}{100.10^{-3}}=-100A/s$$

$$b=\frac{5}{100}=5.10^{-2}A$$

$$i(t)=-100t+5.10^{-2}$$

Résultat



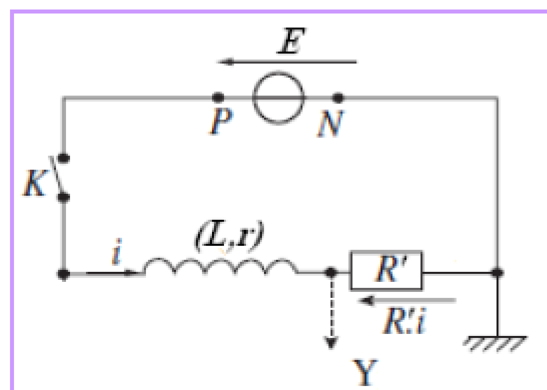
$$\frac{u_L}{\frac{di}{dt}}=\frac{1}{100}=10^{-2}H=10mH$$

$$\frac{u_L}{\frac{di}{dt}}=L\Rightarrow u_L=L\frac{di}{dt}$$

$$\frac{u}{\frac{di}{dt}}=cte=L$$

L est une caractéristique de la bobine appelé : conductance

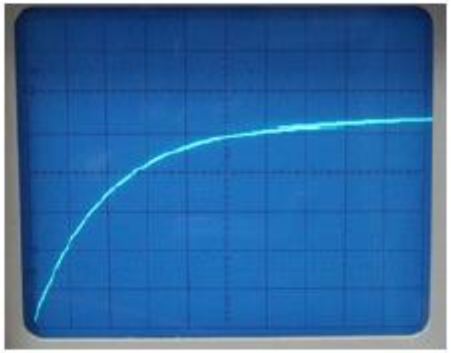
1)- Étude expérimentale : Réponse à un échelon de tension.



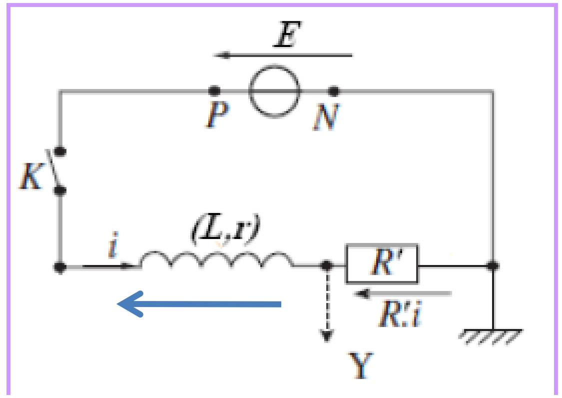
Sur Y on visualise a l'oscilloscope la tension au borne de R
Et donc l'évolution du courant car u_R=R'i

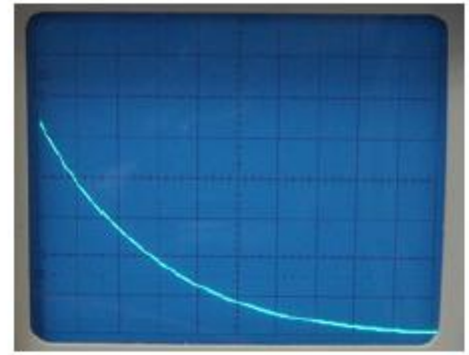
Si on ferme l’interrupteur k

Si on ouvre l’interrupteur k



$u_{R'}(t) = R'.i(t)$





$u_{R'}(t) = R'.i(t)$

R=R’+r

Éq différentielle $\frac{L}{R} \cdot \frac{di}{dt} + i = \frac{E}{R}$ $\qquad$ $\frac{L}{R} \cdot \frac{di}{dt} + i = 0$

Solution $i = \frac{E}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t})$ $\qquad$ $i = \frac{E}{R} \cdot e^{-\frac{R}{L}t}$

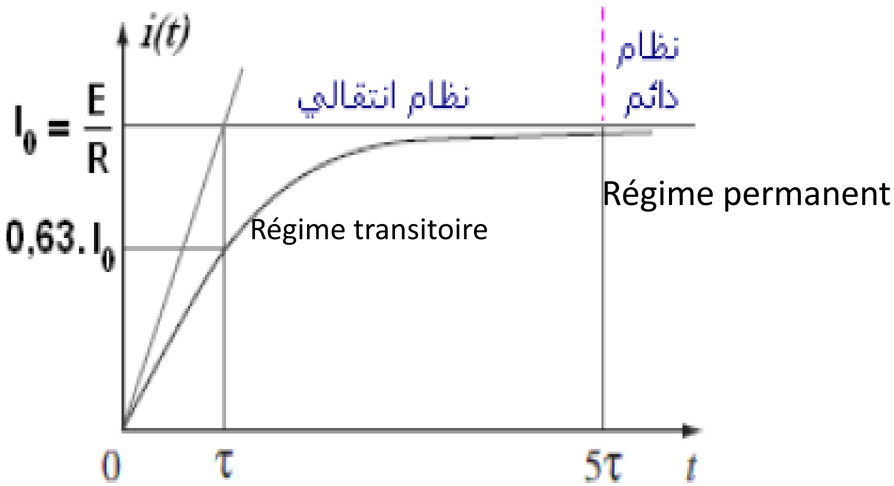
constante de temps $\tau = \frac{L}{R}$

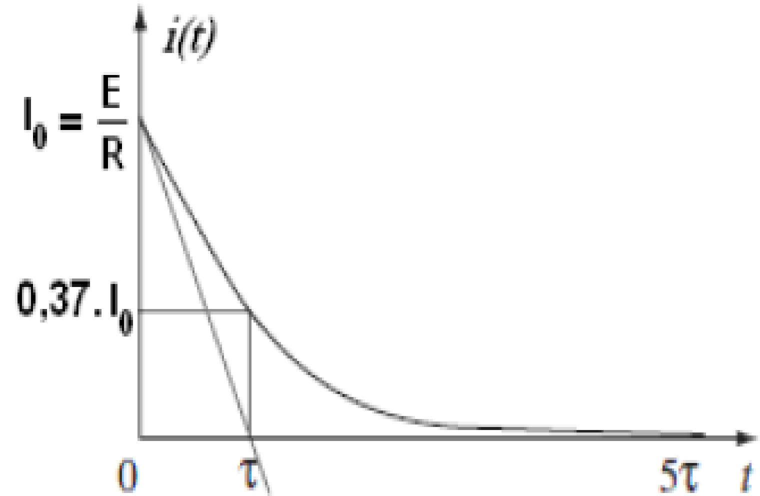
Temps nécessaire pour que l’intensité du Courant atteint 63% de sa valeur maximale

$i=0.63i_0$

Temps nécessaire pour que l’intensité du Courant diminue de 63% de sa valeur maximale

$i=0.37i_0$





On ferme l'interrupteur

On ouvre l'interrupteur

Energie emmagasinée dans la bobine : $\boxed{E_B = \frac{1}{2} L \times i^2}$

Comment résoudre l'équation différentielle

Si on ferme l'interrupteur k

$$E = u_{AB} + u_{BM}$$

$$E = \left(L . \frac{di}{dt} + r . i\right) + R' . i$$

$$E = L . \frac{di}{dt} + (r + R') . i$$

En posant $R = r + R'$

$$E = L . \frac{di}{dt} + R . i \quad (1)$$

On cherche une solution de la forme $i(t) = A + Be^{kt}$ A, B et k sont des constantes à déterminer

étape 1 : On remplace i(t) dans l'équation différentielle

$$\frac{di}{dt} = Bke^{kt} \longrightarrow E = Lke^{kt} + R(A + Be^{kt}) = B(Lk + R)e^{kt} + RA$$

Équation valable quel que soit t donc : **RA =E et Lk+R=0**

Donc $A = \frac{E}{R}$ $k = \tau = -\frac{R}{L}$

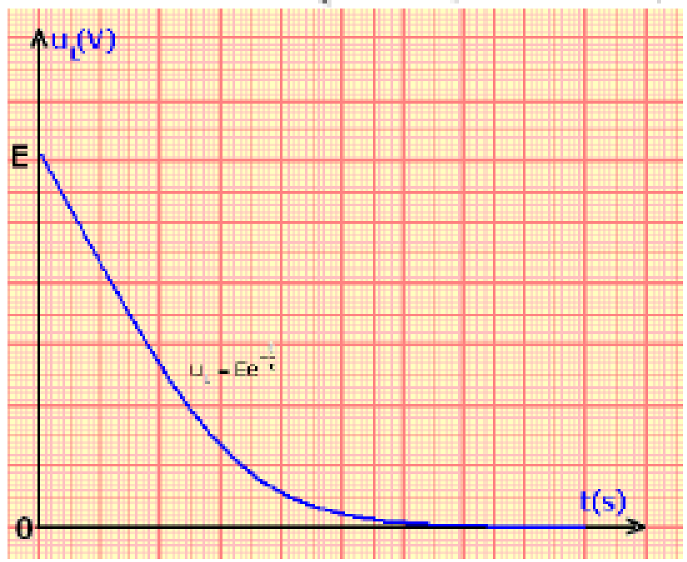
Étape 2 :Pour déterminer B on utilise les conditions initiales

i(t=0)=0 $\longrightarrow$ A+B=0 $\longrightarrow$ A=-B

$$i(t) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

- Tension aux bornes de la bobine

$U_L = E - Ri$ ⇒ $u_L = E\left(1-\left(1+e^{-\frac{t}{\tau}}\right)\right) \Rightarrow u_L = Ee^{-\frac{t}{\tau}}$



Si on ouvre l'interrupteur k

On a $L\frac{di}{dt} + Ri = 0$

On cherche une solution de la forme $i(t) = A + Be^{kt}$ A, B et k sont des constantes à déterminer

$$\frac{di}{dt} = Bke^{kt}$$

$$L\frac{di}{dt} + Ri = 0 \quad \Longrightarrow \quad 0 = BLke^{kt} + R(A + Be^{kt}) = B(Lk + R)e^{kt} + RA$$

DONC $\begin{cases} RA = 0 \\ Lk + R = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ k = -\dfrac{R}{L} \end{cases}$

Soit $$i(t) = Be^{-\frac{R}{L}t}$$

Pour déterminer B on utilise les conditions initiales

A **t** = 0 s, L'interrupteur **était fermé**, Le courant est établi est l'intensité dans le circuit est donnée par la relation :

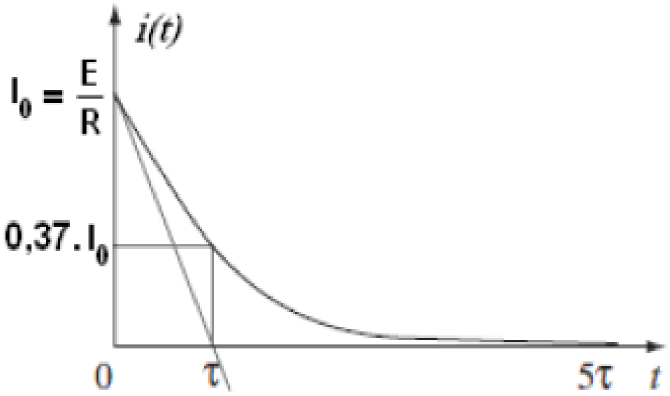
$$i(0) = \frac{E}{R} \quad \Rightarrow \quad B = \frac{E}{R} \Rightarrow \quad i(t) = \frac{E}{R}e^{-\frac{R}{L}t}$$

-**Remarque :**

- **lorsque t tend vers l'infini, alors i (t) tend vers zéro.**

-**Le courant électrique ne s'annule pas brusquement à l'ouverture du circuit.**
-
-**La bobine s'oppose à la diminution de l'intensité du courant électrique dans le circuit.**

- De façon générale, une bobine s'oppose aux variations de l'intensité du courant électrique dans un circuit.



On ouvre l'interrupteur

Expression de la tension aux bornes de la bobine en fonction du temps

$$u_{AB} = L \cdot \frac{di}{dt} + r \cdot i$$

$$u_{AB} = -L \cdot \frac{E}{R} \cdot \frac{R}{L} \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t} + r \cdot \frac{E}{R} \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t}$$

$$u_{AB} = -E \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t} + r \cdot \frac{E}{R} \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t}$$

$$u_{AB} = E \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t} \cdot \left(\frac{r}{R} - 1 \right)$$

Pour une bobine idéale r = 0

$$U_L(t) = -Ee^{-\frac{R}{L}t}$$

Analyse dimensionnelle de τ :

$$\tau = \frac{L}{R} \rightarrow [\tau] = \frac{[L]}{[R]}$$

$$u = L \times \frac{di}{dt} \rightarrow [U] = [L] \times \frac{[I]}{[T]}$$

$$u = R \times i \rightarrow [U] = [R] \times [I]$$

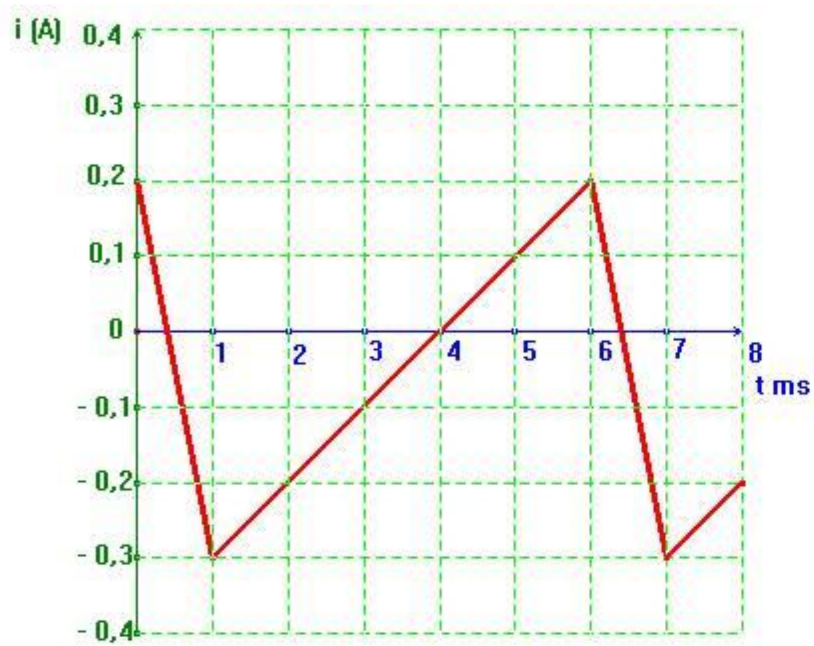
$$[L] \times \frac{[I]}{[T]} = [R] \times [I]$$

D'où $\frac{1}{[T]} = \frac{[R]}{[L]}$

Finalement, $\frac{[L]}{[R]} = [\tau] = [T] = T$ τ s'exprime en seconde

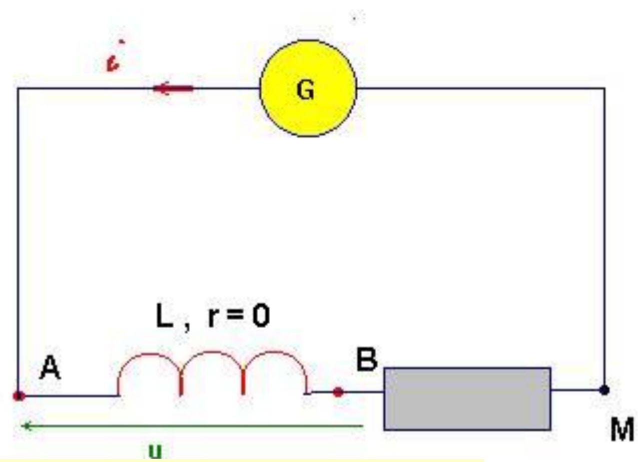
Application

L'intensité du courant traversant une bobine idéale d'inductance **L** = 10 mH a l'allure représentée ci-contre. La bobine est étudiée en convention récepteur.
Représenter l'allure de la tension u aux bornes de la bobine
(prendre 1 cm ↔ 1 V
et 1 cm ↔ 1 ms)



Réponse

Il faut faire un schéma et orienter le circuit.



$$U_L = L\frac{di}{dt}$$

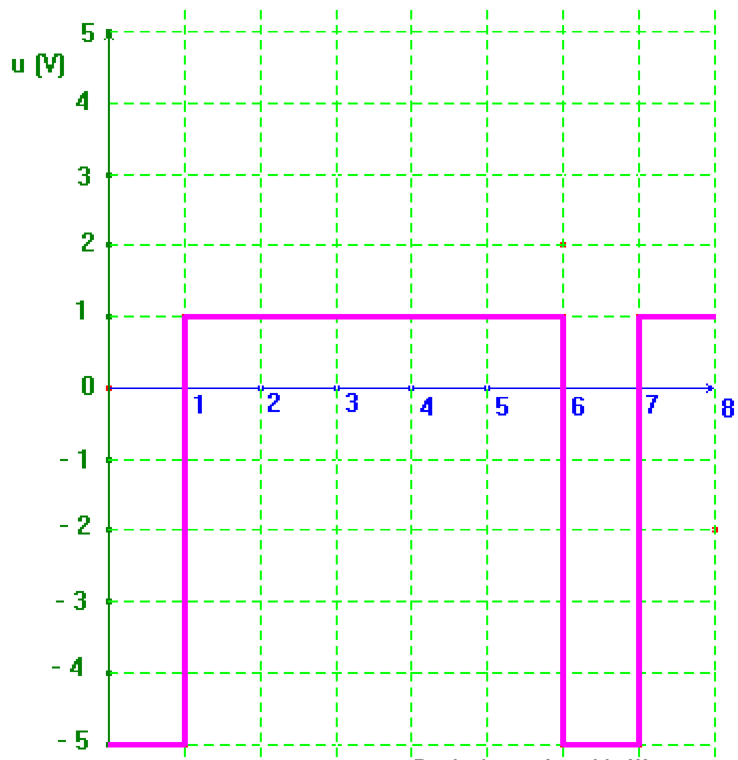
Première phase : **(0,1ms)**, l'intensité **= a . t + b**. En conséquence,

Pr. Lahoucine Hajji

$$a = \frac{-0{,}3 - 0{,}2}{1.10^{-3}} = -0{,}5.10^{3}\,A/s \qquad U_L = L\frac{di}{dt} = 10.10^{-3}x(-0{,}5.10^{3}) = 5V$$

Première phase : **(1ms,6ms)**, l'intensité **= a' . t + b'**. En conséquence,

$$a' = \frac{0{,}2 - (-0{,}3)}{(6-1).10^{-3}} = 1.10^{2}\,A/s \qquad U_L = L\frac{di}{dt} = 10.10^{-3}x(1.10^{2}) = 1V$$



Pr. Lahoucine Hajji