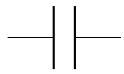
Mohamed El Founani
Lycée Ibn Maja

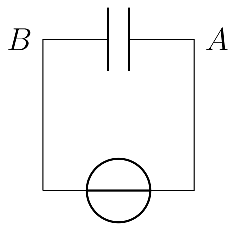
Le dipôle RC :

Le condensateur C :

Un condensateur est un composant électrique, formé par deux conducteurs métalliques appelés "armatures", et qui sont séparés par un isolant qui peut être l'air ou un diélectrique. Son symbole dans les circuits est celui ci-contre.



Charge du condensateur :



Dans un condensateur, la charge électrique q_A portée par l'armature A est l'opposée de q_B celle portée par l'armature B. On écrit alors :

$$q_A = -q_B \iff q_A + q_B = 0$$

Intensité :

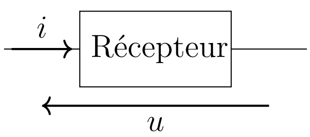
On sait que l'intensité est la variation de charge, donc :

$$i = \frac{\mathrm{d}q_A}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}q_B}{\mathrm{d}t}$$

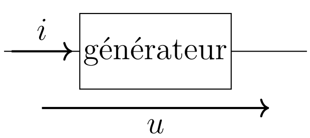
Tout simplement :

$$i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$$

D'où, on peut dire que i est positif lorsque les charges positifs circulent vers la plaque A.
Convention récepteur : Lorsque la flèche de l'intensité et de la tension sont de sens opposés.



Convention générateur : Lorsque les deux flèches sont de même sens.



Capacité du condensateur :

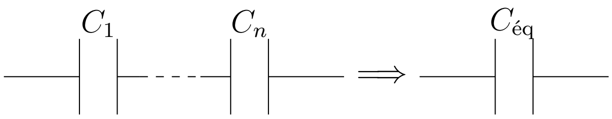
On définit la capacité C par la relation suivante :

$$C = \frac{q_A}{u_{AB}} = -\frac{q_B}{u_{AB}}$$

L'unité de C est le Farad F.

Association des condensateurs :

En série :



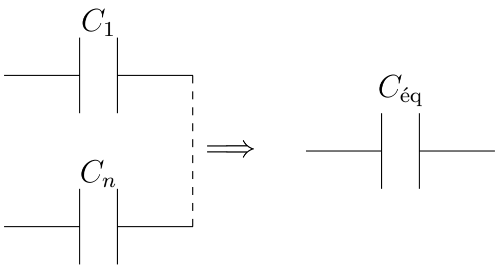
Puisque le montage est en série alors : $u = u_1 + \cdots + u_n$ et $i = i_1 = \cdots = i_n \Longleftrightarrow q = q_1 = \cdots = q_n$.
On a :

$$u_{éq} = \sum_{i=1}^{n} u_i \Rightarrow \frac{q}{C_{éq}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{q}{C_i}$$
$$\frac{q}{C_{éq}} = q \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i}$$
$$\frac{1}{C_{éq}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i}$$

Donc, lorsque le montage est en série on a :

$$\frac{1}{C_{éq}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i}$$

En parallèle :

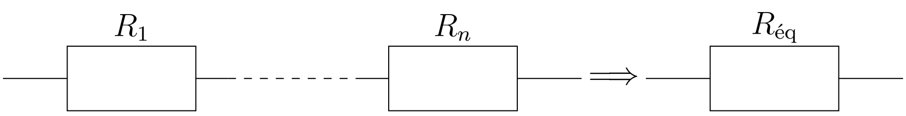


Puisque le montage est en parallèle alors : $u = u_1 = \cdots = u_n$ et $i = i_1 + \cdots + i_n \Longrightarrow q = q_1 + \cdots + q_n$.
On a :

$$q_{éq} = \sum_{i=1}^{n} q_i \Rightarrow C_{éq} u = \sum_{i=1}^{n} C_i u$$
$$C_{éq} = \sum_{i=1}^{n} C_i$$

Association des résistances :

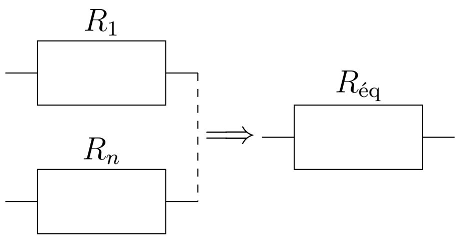
Loi d'Ohm : $u = R \times i$
Association en série :



La résistance équivalente est donnée par la relation suivante :

$$R_{éq} = \sum_{i=1}^{n} R_i$$

Association en parallèle :



La résistance équivalente est donnée par la relation suivante :

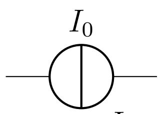
$$\frac{1}{R_{éq}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i}$$

Les générateurs :

Générateur idéal du courant :

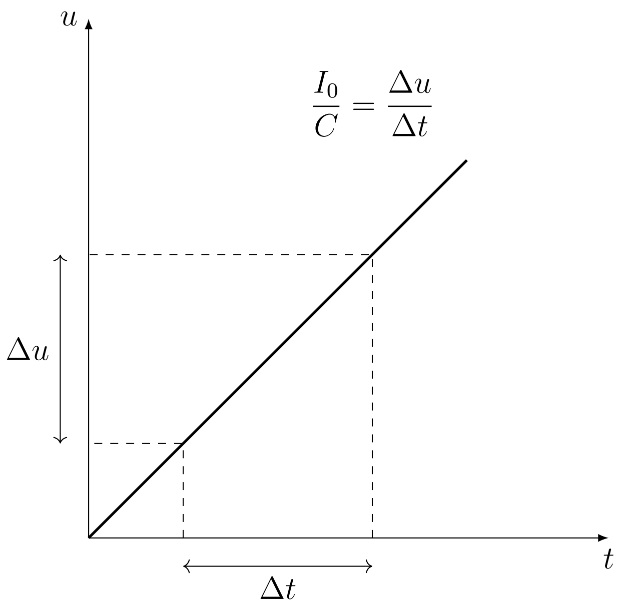
C'est un générateur qui délivre une intensité I_0 constante, c'est-à-dire : $i = I_0 = \mathrm{C^{te}}$

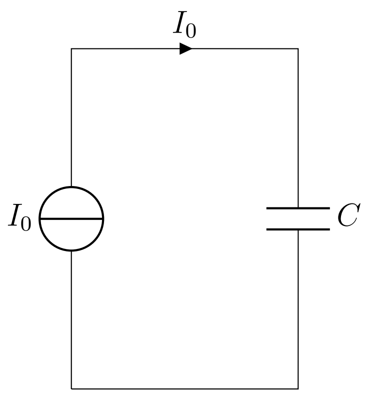
Le symbole :



On a : $I_0 = \dfrac{Q}{t}$ et $Q = C.u$, donc $u = \dfrac{I_0}{C}t$

Puisque u est variable en fonction du temps, alors on peut considérer $\dfrac{I_0}{C}$ comme coefficient directeur de $u(t)$:



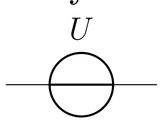


Générateur idéal du tension :

C'est un générateur qui délivre une tension U constante, et i variable, $U = u = \mathrm{C^{te}}$
On a :

$$i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} \qquad q = C.u_C$$

Le symbole :



Donc :

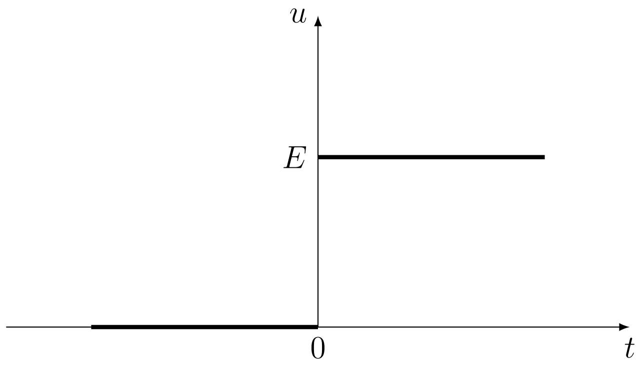
$$i = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$$

Le dipôle RC :

La charge d'un condensateur :

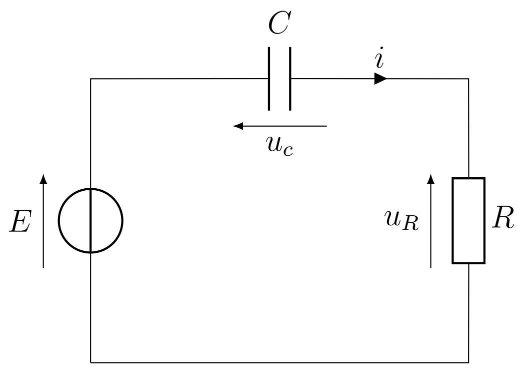
Échelon de tension :

C'est le passage instantané d'une tension 0 à une tension de valeur constante E.

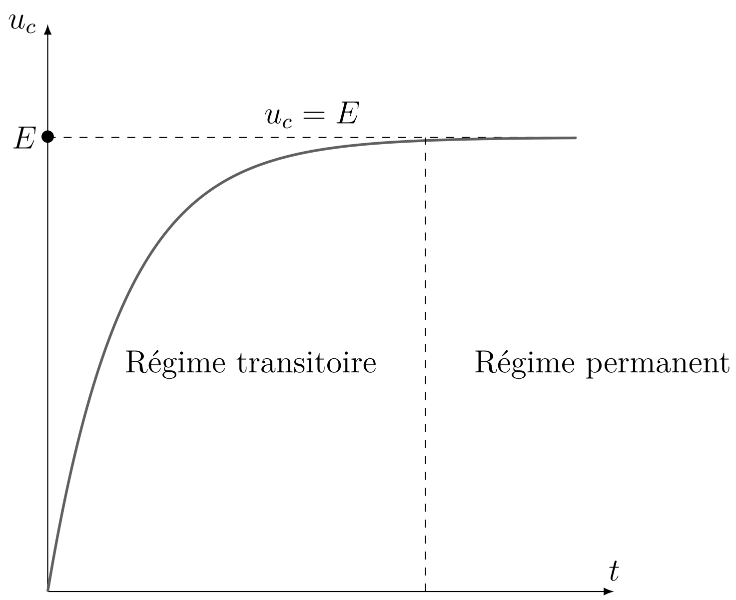


Étude expérimentale :

Soit le circuit suivant :



Sur l'oscilloscope on obtient la courbe qui comporte deux régimes :
Régime transitoire : dans lequel la tension aux bornes du condensateur croît depuis la valeur 0.
Régime permanent : dans lequel la tension reste pratiquement constante, lorsque $t \to \infty$ u_c tend vers E.



Étude théorique :

Équation différentielle : D'après la loi d'additivité des tensions on a :

$$\begin{aligned} E &= u_c + u_R \\ &= u_c + Ri \\ &= u_c + R\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} \\ &= u_c + RC\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} \end{aligned}$$

Donc on en déduit l'équation suivante :

$$u_c + RC\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} = E$$

C'est une équation différentielle d'inconnue u_c, dont la solution s'écrit sous la forme suivante :

$$u_c = Ae^{-\lambda t} + B \tag{1}$$

Détermination de A, B et λ :
Il suffit de remplacer (1) dans l'expression qu'on a démontré.
C'est-à-dire :

$$Ae^{-\lambda t} + B + RC\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(Ae^{-\lambda t} + B\right) = E$$

On rappelle que :

$$(e^{u(x)})' = u'(x)e^{u(x)}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(Ae^{-\lambda t}\right) &= A\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(e^{-\lambda t}\right) \\ &= A \times \left(-\lambda e^{-\lambda t}\right) \\ &= -A\lambda e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

Par suite, l'équation devient :

$$\begin{aligned} Ae^{-\lambda t} + B + RC\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(Ae^{-\lambda t} + B\right) &= E \\ Ae^{-\lambda t} + B - RCA\lambda e^{-\lambda t} - E &= 0 \\ Ae^{-\lambda t}\left(1 - \lambda RC\right) + \left(B - E\right) &= 0 \end{aligned}$$

D'où on en déduit :

$$\begin{cases} 1 - \lambda RC &= 0 \\ B - E &= 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \lambda &= \dfrac{1}{RC} \\ B &= E \end{cases}$$

Pour A, elle se détermine à partir des conditions initiales, c-à-d lorsque $t = 0$:
À $t = 0$ on a :

$$\begin{aligned} u_c &= 0 \\ Ae^{-\frac{0}{RC}} + E &= 0 \\ A + E &= 0 \\ A &= -E \end{aligned}$$

Par suite l'expression de u_c est :

$$u_c = E - Ee^{-\frac{t}{RC}}$$
$$u_c = E\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

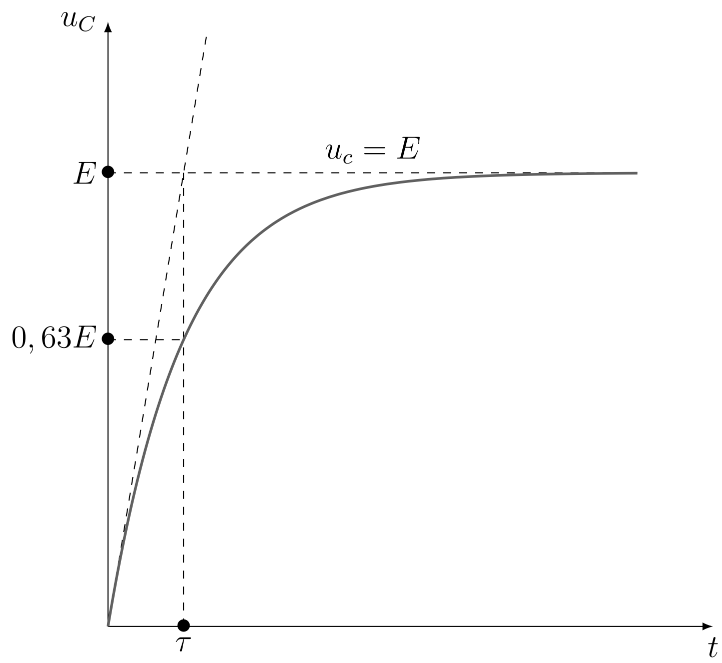
La constante de temps :
Afin d'avoir l'homogénéité dans l'expression de u_c, il faut que RC soit temporelle. Vérifions ceci par l'analyse dimensionnelle.

$$\begin{aligned}[RC] &= [R][C] \\ &= \frac{[U]}{[I]}\frac{[Q]}{[U]} \\ &= \frac{1}{[I]}[I][T] \\ &= [T]\end{aligned}$$

Donc RC est temporelle. On notera cette constante τ dans la suite du cours.
Afin de déterminer sa valeur, on utilise deux méthodes :
Méthode analytique : On pose $t = \tau$:

$$\begin{aligned}u_c &= E(1 - e^{-1}) \\ &= \left(1 - \frac{1}{e}\right)E \\ &\approx 0,63E\end{aligned}$$

Et par projection, on trouve la valeur de τ.
Méthode de la tangente : la tangente à la courbe à $t = 0$ coupe la droite $u_c = E$ en un point dont l'abscisse est τ *la constante du temps*.



L'intensité du courant : Dans le dipôle RC on a :

$$i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = C\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}$$

Et on sait que :

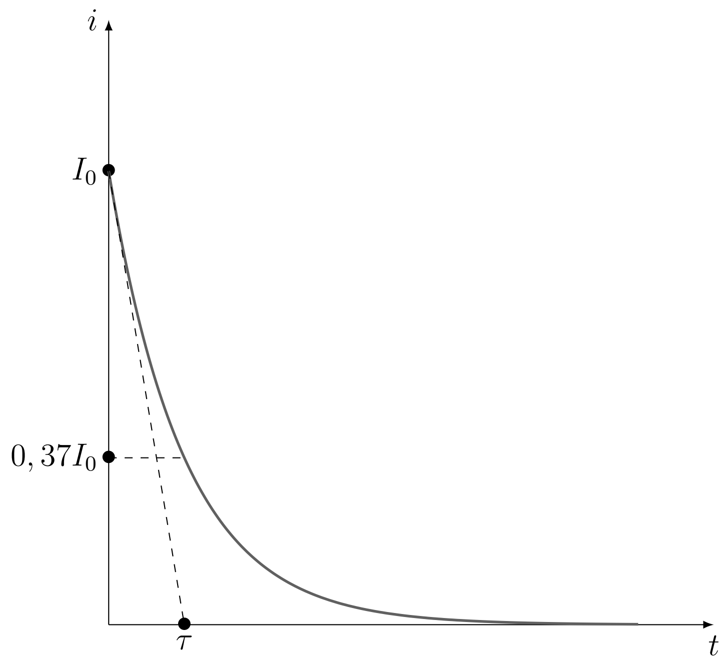
$$u_c = E\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

Alors :

$$\begin{aligned} i &= C\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} \\ &= C\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(E\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)\right) \\ &= C\frac{E}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}} \\ &= \frac{E}{R}e^{-\frac{t}{\tau}} \end{aligned}$$

Posons $I_0 = \dfrac{E}{R}$, on aboutit à l'expression de l'intensité du courant :

$$i = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$



Pour déterminer τ la constante du temps, on utilise l'une des méthodes citées précédemment.
Pour **la charge du condensateur** on a :

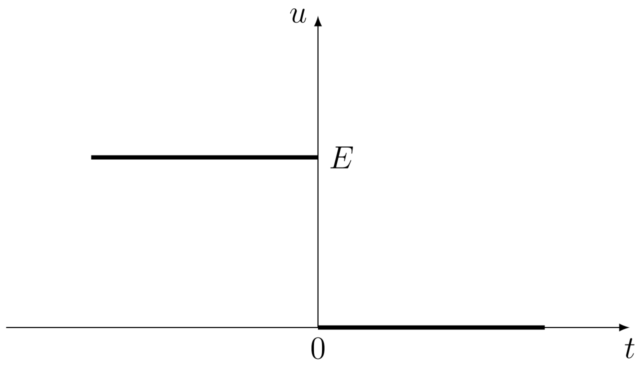
$$q = C.u_c$$

Avec l'expression de u_c on obtient :

$$\begin{aligned} q &= CE\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \\ &= Q_0\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \end{aligned}$$

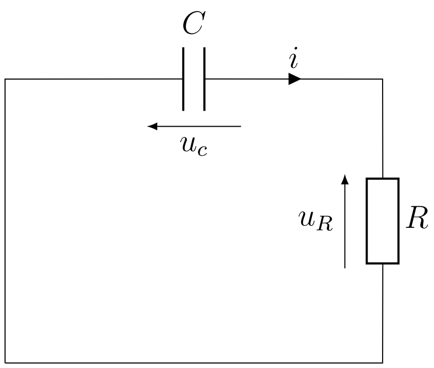
Décharge d'un condensateur :

Échelon de tension :

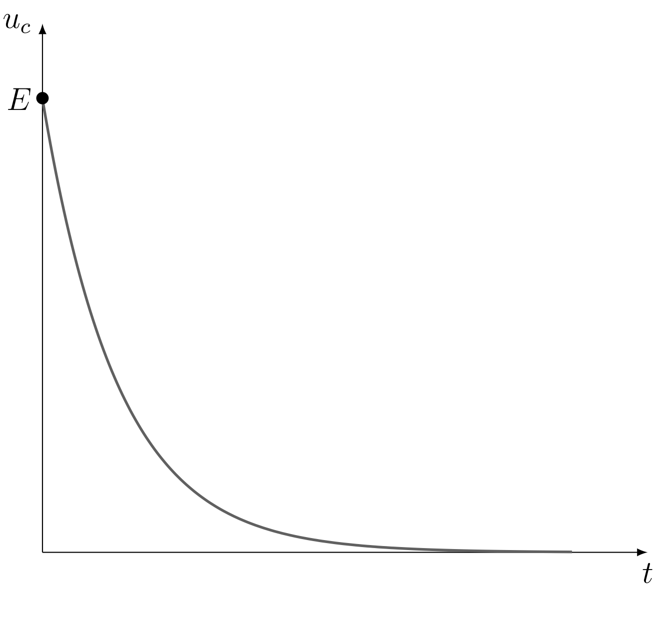


Étude expérimentale :

Soit le circuit suivant :



Sur un oscilloscope on obtient la courbe qui comporte deux régimes :
Régime transitoire : dans lequel la tension u_c décroît depuis sa valeur initiale.
Régime permanent : dans lequel la tension u_c reste pratiquement nulle, lorsque $t \to \infty \Rightarrow u_c \to \infty$.



Étude théorique :

Équation différentielle : D'après la loi d'additivité des tensions on a :

$$\begin{aligned} u_c + u_R &= 0 \\ u_c + Ri &= 0 \\ u_c + RC\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} &= 0 \end{aligned}$$

On obtient l'équation différentielle suivante :

$$u_c + RC\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} = 0$$

La solution est donnée par :

$$u_c = Ae^{-\lambda t}$$

Détermination de A et λ :
On sait que :

$$u_c + RC\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} = 0$$

et que :

$$u_c = Ae^{-\lambda t}$$

Donc :

$$\begin{aligned} Ae^{-\lambda t} + RC\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(Ae^{-\lambda t}\right) &= 0 \\ Ae^{-\lambda t} - RCA\lambda e^{-\lambda t} &= 0 \\ Ae^{-\lambda t}(1-\lambda RC) &= 0 \end{aligned}$$

C'est-à-dire :

$$1 - \lambda RC = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{RC} = \frac{1}{\tau}$$

Pour A on recourt aux conditions initiales :
À $t = 0$ on a $u_c = E$, autrement dit :

$$Ae^{-\frac{0}{\tau}} = E \Leftrightarrow A = E$$

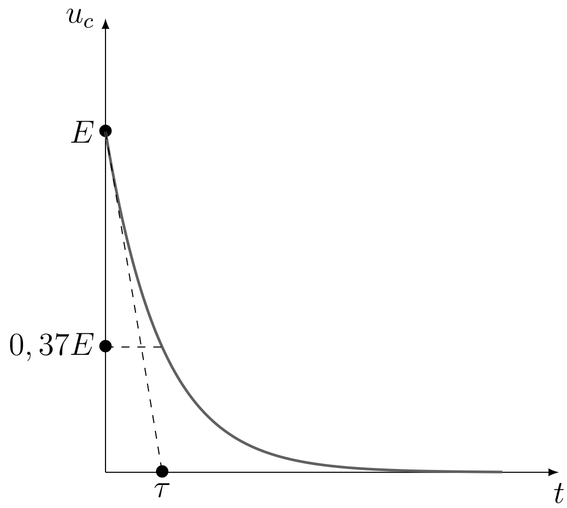
Par suite l'expression de u_c est :

$$u_c = Ee^{-\frac{t}{\tau}}$$

La constante de temps :
Afin de déterminer τ on a deux méthodes :
Méthode analytique : On pose $t = \tau$:

$$\begin{aligned} u_c &= Ee^{-1} \\ &\approx 0,37E \end{aligned}$$

La constante τ est l'abscisse correspondante à l'ordonnée $0,37E$.
Méthode de la tangente: La tangente à la courbe à l'instant $t = 0$ coupe l'axe des temps en un point dont l'abscisse est τ.



L'intensité du courant : On sait que :

$$i = C\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}$$

Et on a :

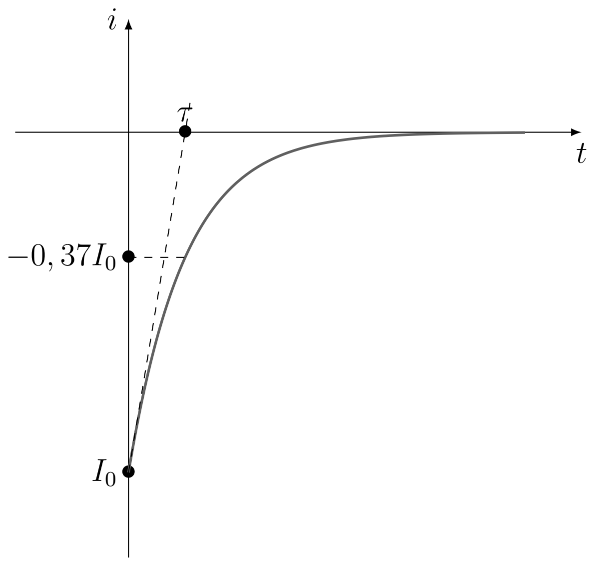
$$u_c = Ee^{-\frac{t}{\tau}}$$

Par dérivation on obtient :

$$\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} = \frac{-E}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Donc :

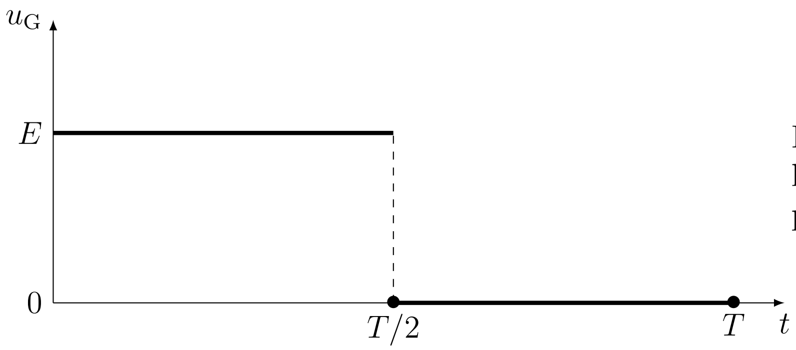
$$\begin{aligned} i &= C\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} \\ &= C \times \frac{-E}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}} \\ &= -\frac{E}{R}e^{-\frac{t}{\tau}} \\ &= -I_0e^{-\frac{t}{\tau}} \end{aligned}$$



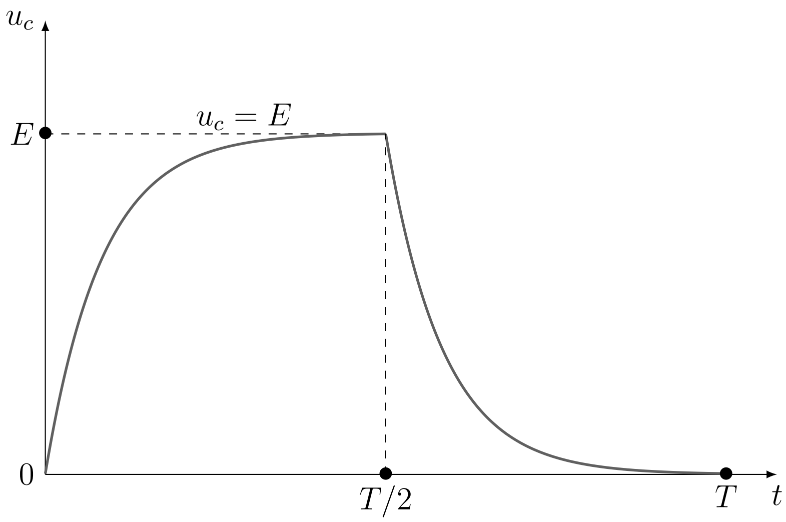
La charge du condensateur : On a :

$$\begin{aligned} q &= Cu_c \\ &= CEe^{-\frac{t}{\tau}} \\ &= Q_0e^{-\frac{t}{\tau}} \end{aligned}$$

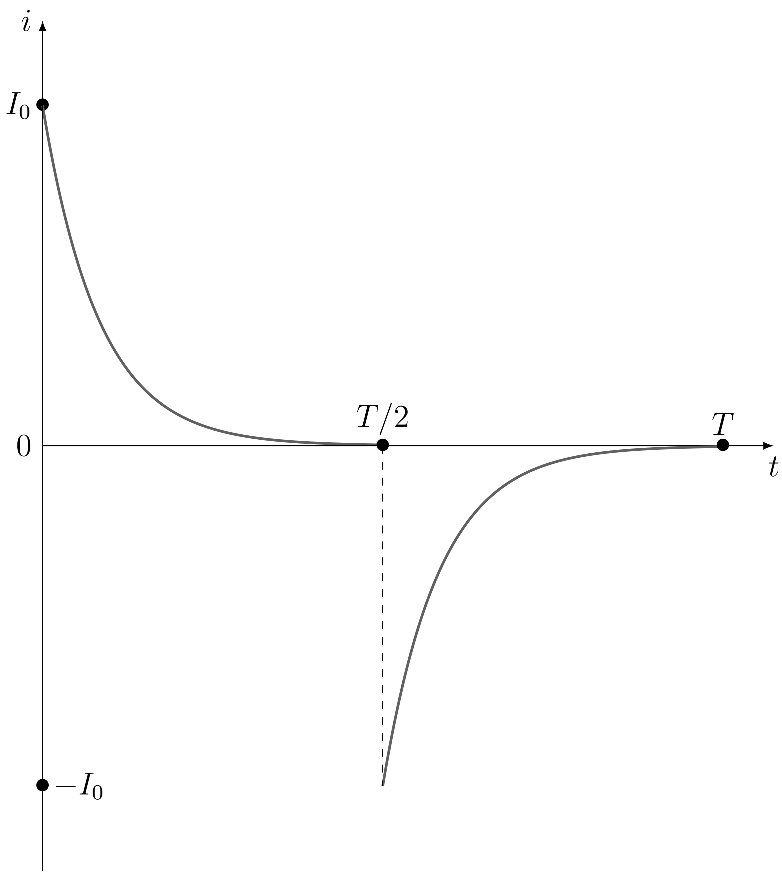
Charge et décharge périodique :



La courbe ci-contre représente un échelon de tension débité par un générateur pendant une période.



La courbe ci-contre représente la réponse du dipôle RC pendant une période.



La courbe ci-contre représente l'intensité du courant en fonction du temps pendant en période.

Aspect énergétique :

On sait que :

$$\mathscr{P} = u \times i$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\mathscr{P} &= \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} \\
&= \frac{\mathrm{d}\mathscr{E}}{\mathrm{d}t} \\
\mathrm{d}\mathscr{E} &= \mathscr{P}\mathrm{d}t \\
\int \mathrm{d}\mathscr{E} &= \int \mathscr{P}\mathrm{d}t \\
\mathscr{E} &= \int u\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t \\
&= \int \frac{q}{C}\mathrm{d}q \\
&= \frac{1}{C}\frac{q^2}{2}
\end{aligned}$$

Or $q = C.u_c$ on obtient :

$$\mathscr{E} = \frac{1}{2}C.u_c^2 = \frac{1}{2C}q^2$$

Remarque : En physique, on note $\int$ comme symbole de l'opération qui nous permet de trouver la primitive.