

Probabilité

I – Vocabulaires

II – Probabilité d'un évènement

III - Probabilité conditionnelle



IV – Variables aléatoires

V – Loi binomiale

I – Vocabulaires

1 – Exemple

Lançons un dé, à l'arrêt, sa face supérieure porte l'un des nombres 1, 2, 3, 4, 5 ou 6. Si le dé est non truqué (on dit encore bien équilibré ou parfait). Nous sommes incapables de prévoir quelle face va apparaître. Nous sommes en présence d'une **expérience aléatoire**.



1, 2, 3, 4, 5 ou 6 sont les **résultats** ou les **cas possibles** ou les **issues** ou les **éventualités**.

L'ensemble des éventualités est **l'univers** Ω . $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Remarque: Le lancer d'une pièce de monnaie, le lancer d'un dé bien équilibré, le tirage des boules simultanément ou successivement avec remise ou sans remise... sont **des expériences aléatoires**, car avant de les effectuer, on ne peut pas prévoir avec certitude quel en sera le résultat. Le résultat dépend en effet du **hasard**.

2 – Evénement

Considérons $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ l'univers ou ensemble des éventualités de cette expérience.

L'événement $A = \{1, 3, 5\}$ est une partie de Ω est l'événement "Obtenir un nombre impair"

$B = \{2, 4, 6\}$ est l'événement "Obtenir un nombre pair"

L'univers Ω est l'événement **certain**.

L'ensemble vide \emptyset est l'événement **impossible**.



3 – Evénement élémentaire

$C = \{3\}$ est un événement qui ne contient qu'une seule éventualité.

On dit que c'est un **événement élémentaire**.

4 – Evénement incompatible

l'événement A "Obtenir un nombre impair" et soit l'événement D = {4, 6}. Aucune éventualité ne réalise simultanément A et D; on dit que A et D sont incompatibles et on note $A \cap D = \emptyset$

5 – Evénement contraire

Soit E "Obtenir un nombre premier" donc $E = \{2, 3, 5\}$

On note \bar{E} l'événement contraire de E dans Ω c'est-à-dire "obtenir un nombre non premier".

On a $E = \{2, 3, 5\}$ donc $\bar{E} = \{1, 4, 6\}$

On a $E \cup \bar{E} = \Omega$

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

II- Probabilité

1 – Définition

Soit E une épreuve aléatoire. L'ensemble des éventualités est

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}.$$

- A chaque événement élémentaire $\{\omega_i\}$ est associé un nombre réel, élément de $[0;1]$ appelé probabilité de l'événement élémentaire tel que : $p(\{\omega_1\}) + p(\{\omega_2\}) + \dots + p(\{\omega_n\}) = 1$
- La probabilité de tout événement A est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le composent.
- $p(\Omega) = 1$.
- Si $A = \emptyset$ alors $p(A) = 0$

2 – L'hypothèse d'équiprobabilité

Lorsque les événements élémentaires d'une expérience ont la même Probabilité, on dit qu'il y a équiprobabilité.

Les situations d'équiprobabilité sont généralement suggérées par des expressions comme: "On tire au hasard", "boules indiscernables au toucher", "dé bien équilibré", "dé non pipé" ...

propriété

Soit p une probabilité sur un univers Ω

Dans l'hypothèse d'équiprobabilité, le nombre total d'éventualités étant n , si un événement A est constitué de m éventualités alors sa probabilité est : $p(A) = \frac{m}{n}$

$$p(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$$

card(A) le nombre de cas favorables
card(Ω) le nombre de cas possibles

3 – Propriétés des probabilités

Parties de E	Vocabulaire des événements	Propriété
A	A quelconque	$0 \leq p(A) \leq 1$
\emptyset	Événement impossible	$p(\emptyset) = 0$
E	Événement certain	$p(E) = 1$
$A \cap B = \emptyset$	A et B sont incompatibles	$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$
\bar{A}	\bar{A} est l'événement contraire de A	$p(\bar{A}) = 1 - p(A)$
A, B	A et B quelconques	$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

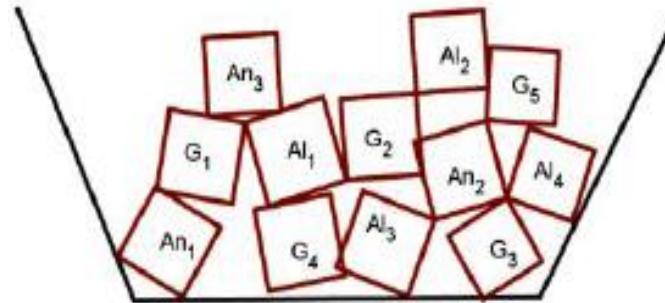
4 – Exemple

Un examen oral de mathématique comporte 5 questions en géométrie, 4 questions en algèbre et 3 questions en analyse.

1) L'étudiant **tire simultanément 3 questions** d'un sac contenant les 12 questions.

Calculer la probabilité des événements suivants:

- A « les trois questions sont en géométrie »
- B « une seule question pour chaque matière »
- C « au moins une question en géométrie »



2) L'étudiant **tire les 3 questions l'une après l'autre sans remise**

Calculer la probabilité des événements A, B et C.

3) L'étudiant **tire les 3 questions l'une après l'autre avec remise**

Calculer la probabilité des événements A, B et C.

Solution:

5 géométrie ; 4 algèbre ; 3 analyse

1)

Tirage simultané de 3 boules parmi 12

$$\text{Card}(\Omega) = C_{12}^3 = 220$$

calculatrice

$$12 \text{ ncr } 3 = 220$$

$$\text{Card}(A) = C_5^3 = 10 \text{ Donc } p(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{10}{220} = \frac{1}{22}$$

$$\text{d'où } p(A) = \frac{1}{22}$$

$$\text{Card}(B) = C_5^1 \times C_4^1 \times C_3^1 = 60 \text{ Donc } p(B) = \frac{\text{card}(B)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{60}{220} = \frac{3}{11}$$

$$\text{d'où } p(B) = \frac{3}{11}$$

Première méthode

$$\text{Card}(C) = C_5^1 \times C_7^2 + C_5^2 \times C_7^1 + C_5^3 = 185 \text{ Donc } p(C) = \frac{\text{card}(C)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{185}{220} = \frac{37}{44} \text{ d'où } p(C) = \frac{37}{44}$$

Deuxième méthode

C « au moins une question en géométrie » l'événement contraire de C est :

 \bar{C} « aucune question en géométrie » c'est-à-dire \bar{C} « les 3 questions en algèbre ou en analyse »

$$\text{Card}(\bar{C}) = C_7^3 = 35 \text{ donc } p(\bar{C}) = \frac{\text{card}(\bar{C})}{\text{card}(\Omega)} = \frac{35}{220} = \frac{7}{44}$$

$$\text{On sait que } p(C) = 1 - p(\bar{C}) \text{ donc } p(C) = 1 - \frac{7}{44} \text{ d'où } \text{d'où } p(C) = \frac{37}{44}$$

Probabilité

2) L'étudiant tire les 3 questions l'une après l'autre sans remise

Tirage successif de 3 boules sans remise parmi 12

$$\text{Card}(\Omega) = A_{12}^3 = 1320$$

calculatrice

$$12 \text{ npr } 3 = 1320$$

$$\text{Card}(A) = A_5^3 = 60 \text{ Donc } p(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{60}{1320} = \frac{1}{22} \text{ d'où } p(A) = \frac{1}{22}$$

$$\text{Card}(B) = 3!(A_5^1 \times A_4^1 \times A_3^1) = 360 \text{ Donc } p(B) = \frac{\text{card}(B)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{360}{1320} = \frac{3}{11} \text{ d'où } p(B) = \frac{3}{11}$$

Première méthode

C « au moins une question en géométrie » l'événement contraire de C est :

\bar{C} « aucune question en géométrie »

$$\text{Card}(\bar{C}) = A_7^3 = 210 \text{ donc } p(\bar{C}) = \frac{\text{card}(\bar{C})}{\text{card}(\Omega)} = \frac{210}{1320} = \frac{7}{44}$$

$$\text{On sait que } p(C) = 1 - p(\bar{C}) \text{ donc } p(C) = 1 - \frac{7}{44} \text{ d'où } p(C) = \frac{37}{44}$$

Deuxième méthode

$$\text{Card}(C) = 3(A_5^1 \times A_7^2) + 3(A_5^2 \times A_7^1) + A_5^3 = 1110$$

$$\text{Donc } p(C) = \frac{\text{card}(C)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{1110}{1320} = \frac{37}{44} \text{ d'où } p(C) = \frac{37}{44}$$

3) L'étudiant tire les 3 questions l'une après l'autre avec remise

Tirage successif de 3 boules avec remise parmi 12

$$\text{Card}(\Omega) = 12^3 = 1728$$

$$\text{Card}(A) = 5^3 = 125 \text{ Donc } p(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{125}{1728} \quad \text{d'où } p(A) = \frac{125}{1728}$$

$$\text{Card}(B) = 6(5^1 \times 4^1 \times 3^1) = 360 \text{ Donc } p(B) = \frac{\text{card}(B)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{360}{1728} = \frac{5}{24} \quad \text{d'où } p(B) = \frac{5}{24}$$

Première méthode

C « au moins une question en géométrie » l'événement contraire de C est :

\bar{C} « aucune question en géométrie »

$$\text{Card}(\bar{C}) = 7^3 = 343 \text{ donc } p(\bar{C}) = \frac{\text{card}(\bar{C})}{\text{card}(\Omega)} = \frac{343}{1728}$$

$$\text{On sait que } p(C) = 1 - p(\bar{C}) \quad \text{donc } p(C) = 1 - \frac{343}{1728} \quad \text{d'où} \quad \text{d'où } p(C) = \frac{1385}{1728}$$

Deuxième méthode

$$\text{Card}(C) = 3(5^1 \times 7^2) + 3(5^2 \times 7^1) + 5^3 = 1385 \text{ Donc } p(C) = \frac{\text{card}(C)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{1385}{1728} \quad \text{d'où } p(C) = \frac{1385}{1728}$$

Exercice

Dans une urne se trouve 9 jetons :

Quatre jetons rouges numérotés 0;1;1;2 et trois jetons verts numérotés 1; 2; 2 et deux jetons noirs numérotés 1; 3

1) On tire simultanément et au hasard trois jetons de l'urne

On considère les évènements suivants:

A " Obtenir 3 jetons verts " ; B " Obtenir 3 jetons de même couleurs "

C " Obtenir 3 jetons de couleurs différents "

D " Obtenir 3 jetons qui portent le même numéro"

E " Obtenir au moins un jeton qui porte le numéro 1"

F " Obtenir au plus un jeton vert "

G " Obtenir 3 jetons de couleurs différents deux à deux"

Déterminer La probabilité des évènements A; B; C; D; E; F; G.

2) Même question pour le tirage successif de trois jetons avec remise.

3) Même question pour le tirage successif de trois jetons sans remise.

IV – Probabilité conditionnelle

1) Définition:

Soient les évènements A et B d'un univers Ω .

La probabilité conditionnelle de B sachant que A est réalisé est le nombre

réel noté $P_A(B)$ ou $P(B/A)$ donc $P_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$; $p(A) \neq 0$

Remarque :

Si A et B sont tous deux de probabilité non nulle, alors les probabilités conditionnelles $p(A/B)$ et $p(B/A)$ sont toutes les deux définies et on a : $p(A \cap B) = p(A/B)p(B) = p(B/A)p(A)$.

2) Événements indépendants:

A et B deux événements de probabilité non nulle.

A et B sont **indépendants** si et seulement si $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$

Exemple

une urne **U** contient neuf jetons indiscernables au toucher:

- Trois jetons blancs numérotés 2 ; 2 ; 1.
- Deux jetons jaunes numérotés 1 ; 1.
- Quatre jetons noirs numérotées 1 ; 1 ; 1 ; 2.

On tire au hasard et simultanément trois jetons de l'urne.

On considère les deux événements suivants :

A « Les trois jetons tirés ont le même numéro »

B « Les trois jetons tirés de couleurs différents deux à deux »

1. Calculer $p(A)$ et $p(B)$ probabilité des événements A et B .

2. Montrer que : $p(A \cap B) = \frac{1}{14}$.

3. Est-ce que les événements A et B sont indépendants ?

4. Donner la probabilité de l'événement C« Les jetons tirés ont le même numéro sachant que les trois jetons tirés de couleurs différents deux à deux »

Solution:

Trois B : 2 ; 2 ; 1 ; Deux J : 1 ; 1 Quatre N : 1 ; 1 ; 1 ; 2

1) Tirage simultané de 3 jetons parmi 9 6 (1) 3 (2)

$$\text{Card}(\Omega) = C_9^3 = 84$$

$$\text{Card}(A) = C_6^3 + C_3^3 = 21 \text{ Donc } p(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{21}{84} = \frac{1}{4} \quad \text{d'où } p(A) = \frac{1}{4}$$

$$\text{Card}(B) = C_3^1 \times C_2^1 \times C_4^1 = 24 \text{ Donc } p(B) = \frac{\text{card}(B)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{24}{84} = \frac{2}{7} \quad \text{d'où } p(B) = \frac{2}{7}$$

2) On a

$$\text{Card}(A \cap B) = C_1^1 \times C_2^1 \times C_3^1 = 6 \quad p(A \cap B) = \frac{\text{card}(A \cap B)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{6}{84} = \frac{1}{14} \quad p(A \cap B) = \frac{1}{14}$$

3) On a

$$p(A \cap B) = \frac{1}{14} \quad \text{et} \quad p(A) \times p(B) = \frac{2}{7} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{14}$$

D'où $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$ d'où A et B sont indépendants.

4) C « Les trois jetons tirés ont le même numéro sachant que les jetons tirés sont de couleurs différents deux à deux »

$$P(C) = P_B(A) \text{ donc } P(C) = P_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{7}} = \frac{7}{8} \quad \text{d'où } P(C) = \frac{7}{8}$$

IV – Variables aléatoires

Dans toute la suite Ω désigne l'univers associé à chaque expérience aléatoire.

1) Exemple introductif:

Une urne contient 3 boules rouges et 4 boules blanches indiscernables au toucher.

On tire simultanément 2 boules. On perçoit un Dirham par boule rouge tirée.

Quels sont les gains possibles ? Avec quelles probabilités ?

On peut tirer 0, 1 ou 2 boules rouges, et donc gagner 0, 1 ou 2 Dirhams.

Désignons par X la somme perçue. La probabilité que X soit égal à 0 est noté $p(X = 0)$; elle est égale à la probabilité de l'événement « tirer 0 boule rouge et 2 boules blanches » ;

$$p(X = 0) = \frac{C_3^0 \times C_4^2}{C_7^2} = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$$

Probabilité

La probabilité que X soit égal à 1 est noté $p(X=1)$; elle est égale à la probabilité de l'évènement « tirer 1 boule rouge et 1 boules blanches » ;

$$p(X = 1) = \frac{C_3^1 \times C_4^1}{C_7^2} = \frac{12}{21} = \frac{4}{7} ;$$

La probabilité que X soit égal à 2 est noté $p(X=2)$; elle est égale à la probabilité de l'évènement « tirer 2 boules rouges et 0 boule blanche » ;

$$p(X = 2) = \frac{C_3^2 \times C_4^0}{C_7^2} = \frac{3}{21} = \frac{1}{7} .$$

Ces résultats peuvent se présenter dans un tableau, la première ligne indiquant les valeurs possibles x de X .

x	0	1	2
$p(X = x)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$

Ce tableau définit la loi de probabilité de X .

2) Variable aléatoire - Loi de probabilité:

a) Définition 1 :

On appelle variable aléatoire X réelle toute application de Ω dans \mathbb{R} , qui à chaque élément de Ω fait correspondre un nombre réel.

Notons $X(\Omega)$ l'ensemble des valeurs possibles de X . $X(\Omega) = \{ x_1 ; x_2 ; \dots ; x_n \}$.

b) Définition 2 :

La loi de probabilité de X est la fonction qui à tout élément x de $X(\Omega)$ fait correspondre la probabilité que X prenne cette valeur x . Par abus de langage on dit que c'est la probabilité que « X soit égal à x » et que l'on note : $p(X = x)$.

Il est commode de présenter cette loi de probabilité sous forme d'un tableau

x	x_1	x_2	x_n
$p(X = x)$	p_1	p_2	p_n

Conseil : Lorsqu'on calcul une loi de probabilité d'une variable aléatoire, il est

indispensable de vérifier que : $\sum_{i=1}^n p_i = 1$.

3 - Espérance mathématique

a) Définition

Soit une variable aléatoire X prenant les valeurs $x_1; x_2; \dots; x_n$ avec les probabilités $p_1; p_2; \dots; p_n$. On appelle espérance mathématique de X le nombre réel positif noté $E(X)$ et défini par:

$$E(X) = p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_nx_n$$

$$E(X) = \sum_{i=1}^{i=n} p_i x_i$$

Dans la pratique, la loi de probabilité étant donnée par un tableau :

x	x_1	x_2	x_n
$p(X = x)$	p_1	p_2	p_n

Il suffit de calculer la somme : $x_1p_1 + x_2p_2 + \dots + x_n p_n$.

b) Exemple

Pour l'exemple introductif on a $E(X) = 0 \times p(X=0) + 1 \times p(X=1) + 2 \times p(X=2) = \frac{6}{7}$.

4 - Variance - Ecart type**a) Définition de la variance**

Soit une variable aléatoire X prenant les valeurs $x_1; x_2; \dots; x_n$ avec les probabilités $p_1; p_2; \dots; p_n$. On appelle variance de X le nombre réel positif noté $V(X)$ et défini par:

$$V(X) = p_1(x_1 - E(X))^2 + p_2(x_2 - E(X))^2 + \dots + p_n(x_n - E(X))^2$$

$$V(X) = \sum_{i=1}^{i=n} p_i (x_i - E(X))^2$$

b) Autre expression de la variance

$$V(X) = p_1x_1^2 + p_2x_2^2 + \dots + p_nx_n^2 - (E(X))^2$$

$$V(X) = \sum_{i=1}^{i=n} p_i (x_i)^2 - (E(X))^2$$

c) Ecart-type:

Pour tout variable aléatoire X , On appelle écart-type de X le nombre réel positif

noté $\sigma(X)$ et défini par:

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

d) Exemple:

Une urne contient 5 boules blanches et 3 boules noires indiscernables au toucher. On tire simultanément de l'urne 3 boules et l'on considère la variable aléatoire X définie par « nombre de boules noires parmi les boules tirées ».

- Quelles sont les valeurs prises par X ?
- Déterminer la loi de probabilité de X .
- Calculer l'espérance mathématique, la variance et l'écart-type de X .

Solution:

a) $X \in \{0 ; 1 ; 2 ; 3\}$

$$P(X=0) = P_1 = \frac{C_5^3 \times C_3^0}{C_8^3} = \frac{10}{56} ; P(X=1) = P_2 = \frac{C_5^2 \times C_3^1}{C_8^3} = \frac{30}{56} ;$$

$$P(X=2) = P_3 = \frac{C_5^1 \times C_3^2}{C_8^3} = \frac{15}{56} ; P(X=3) = P_4 = \frac{C_5^0 \times C_3^3}{C_8^3} = \frac{1}{56} .$$

b) *Loi de probabilité*

X	0	1	2	3	Total
$P(X=x_i)$	$\frac{10}{56}$	$\frac{30}{56}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{1}{56}$	1

c) *L'Espérance mathématique* $E(x) = \sum_{i=1}^n P_i x_i = P_1 x_1 + P_2 x_2 + \dots + P_n x_n .$

$$E(x) = 0 \times \frac{10}{56} + 1 \times \frac{30}{56} + 2 \times \frac{15}{56} + 3 \times \frac{1}{56} = \frac{63}{56} = \frac{9}{8} .$$

La variance est $V(X) = \sum_{i=1}^n P_i (x_i - E(x))^2 .$

$$V(X) = P_1 \left(x_1 - \frac{9}{8} \right)^2 + P_2 \left(x_2 - \frac{9}{8} \right)^2 + \dots + P_4 \left(x_4 - \frac{9}{8} \right)^2 ;$$

$$V(X) = \frac{10}{56} \left(0 - \frac{9}{8} \right)^2 + \frac{30}{56} \left(1 - \frac{9}{8} \right)^2 + \frac{15}{56} \left(2 - \frac{9}{8} \right)^2 + \frac{1}{56} \left(3 - \frac{9}{8} \right)^2 = \frac{1800}{3584} = 0,5 .$$

L'Ecart type est $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} ; \sigma(X) = \sqrt{0,5} = 0,20 .$

V – Loi binomiale

Soit p la probabilité d'un événement A dans une expérience aléatoire

On répète cette épreuve n fois de suite

La variable aléatoire X qui lie chaque résultat au nombre de fois que cet événement se réalise s'appelle une variable aléatoire binomiale de paramètres n et p

Et on a : $\forall k \in \{0;1;2;3;...;n\}$; $p(X=k) = C_n^k \times p^k \times (1-p)^{n-k}$

$$\text{Et } E(X) = n \times p$$

$$\text{Et } \nu(X) = n \times p \times (1-p)$$

Exemple:

1) On lance une fois un dé cubique équilibré et on considère l'événement suivant:

A « On obtient un diviseur de 3 » calculer $p(A)$

2) On répète cette épreuve quatre fois de suite. Soit X la variable aléatoire qui est égale au nombre de fois la réalisation de l'événement A

Déterminer la loi de probabilité de X et calculer l'espérance mathématique et la variance de X

Solution:

1) Les diviseurs de 3 sont 1 et 3

$$\text{donc } p(A) = \frac{1}{3}$$

2) X est une variable aléatoire binomiale de paramètre 4 et $p(A)$.

$$p(X = k) = C_4^k (p(A))^k (1 - p(A))^{4-k} \quad k \in \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4\}$$

k	0	1	2	3	4	Total
$P(X = k)$	$\frac{16}{81}$	$\frac{32}{81}$	$\frac{24}{81}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{1}{81}$	1

$$E(X) = 4 \times p(A) \quad \text{et} \quad V(X) = 4 \times p(A)(1 - p(A))$$

$$E(X) = \frac{4}{3} \quad \text{et} \quad E(X) = \frac{8}{9}$$