

NOTIONS DE DENOMBREMENT

I. Ensemble fini – cardinal d'un ensemble fini

a. Définition :

$n \in \mathbb{N}^*$; E est un ensemble qui contient n éléments . On dit que E est un ensemble fini .

Le nombre n s'appelle le cardinal de E on note $\text{card}E = n$ avec $\text{card}\emptyset = 0$.

b. Exemple :

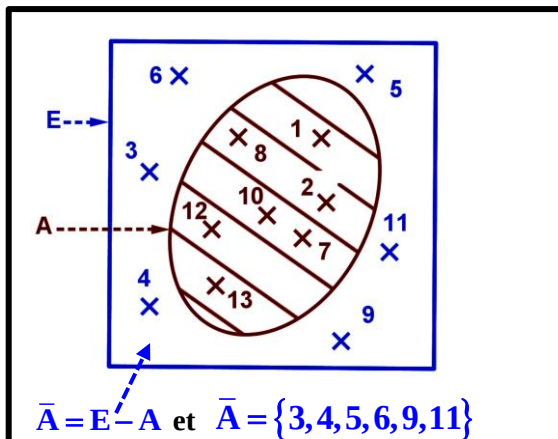
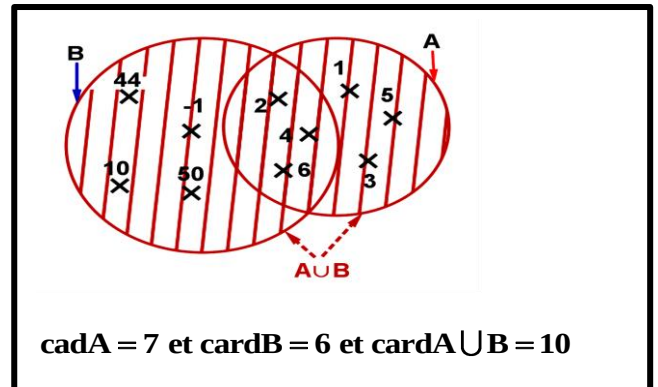
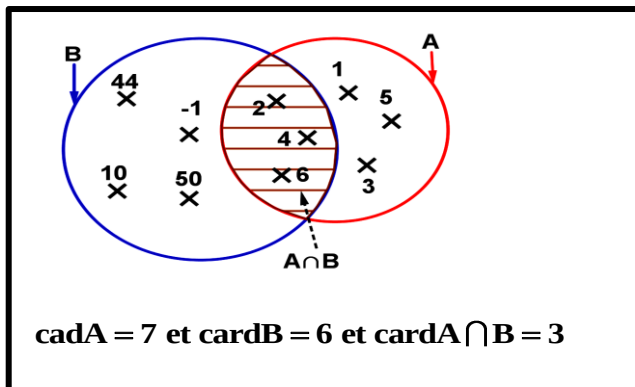
- Soit $E = \{a, b, c, f\}$ donc $\text{card}E = 4$.
- Les ensembles : $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$ et $[0, 1[$ sont des ensembles infinis

c. Propriété :

E et F sont deux ensembles .

- Si $E \cap F = \emptyset$ alors $\text{card}E \cup F = \text{card}E + \text{card}F$.
- En général : $\text{card}E \cup F = \text{card}E + \text{card}F - \text{card}E \cap F$.
- $\text{card}E \times F = \text{card}E \times \text{card}F$; $E \neq \emptyset$ et $F \neq \emptyset$.
- Si $A \subset E$ (A est une partie de E), on note l'ensemble suivant : $\{x \in E / x \notin A\}$ par $\bar{A} = E \setminus A$.
- On a : $\text{card}\bar{A} = \text{card}E - \text{card}A$.

d. Exemple :



$$E \times F = \{1, 2\} \times \{a, b, c\} = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$$

II. Principe fondamental de dénombrement :

a. Activité :

On veut déterminer tous les nombres constitués par deux chiffres différents parmi les chiffres 3 et 4 et 5 et combien de nombres on a formé ?

1^{ère} méthode (aléatoire) :

54 – 45 – 35 – 43 – 53 – 34 donc on a obtenue 6 nombres .

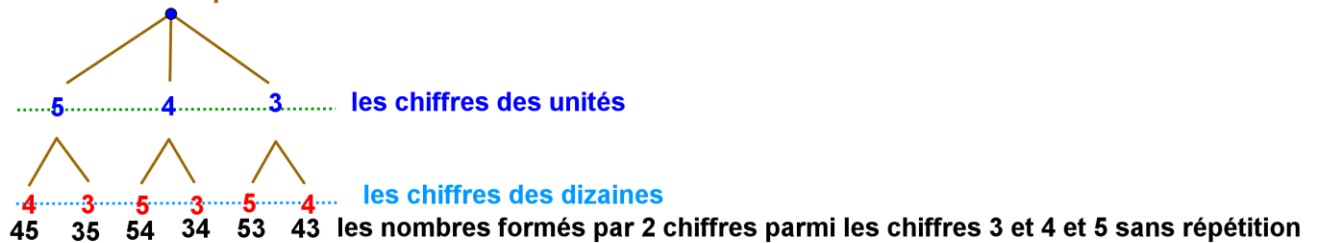
2^{ème} méthode :

On sait que tout nombre former par 2 chiffres est écrit de la forme ba tel que :

a désigne le chiffre des unités ; b désigne le chiffre des dizaines .

- Le premier choix sera pour le chiffre des unités a le nombre des manières pour choisir a est 3 (on choisit le chiffre 3 ou 4 ou 5) .
- Le deuxième choix sera pour le chiffre des dizaines b le nombre des manières pour choisir b est 2 (car les deux chiffres sont différents) .
D'où : le nombre des chiffres est $3 \times 2 = 6$.
- Cette méthode on peut la représenter de la manière suivante , on l'appelle arbre des éventualités (ou arbre des cas) .

arbre des cas possibles



b. Principe général de dénombrement (ou principe du produit) :

On considère une expérience comporte p choix (étape) avec $(p \in \{1, 2, 3, \dots\})$.

- Si le choix n° 1 se fait avec n_1 manières différentes .
- Si le choix n° 2 se fait avec n_2 manières différentes .
-
- Si le choix n° p se fait avec n_p manières différentes .

Alors le nombre total des manières des p choix est $n_1 \times n_2 \times n_3 \times \dots \times n_p$.

c. Exemples :

Exemple 1 :

On lance un dé (a 6 faces numérotés de 1 à 6) deux fois successives .

- Chaque résultat obtenue est constitué par :
 - ✓ Le résultat lorsque on lance le dé pour la 1^{ère} fois .
 - ✓ Le résultat lorsque on lance le dé pour la 2^{ème} fois .
- Le résultat obtenue après de lancer le dé 2 fois est appelé **cas possible** ou **éventualité** .

1. Déterminer le nombre des cas possibles (ou des éventualités)

- Le 1^{er} lancer a 6 choix (ou cas possibles) .
- Le 2^{ème} lancer a 6 choix (ou cas possibles) .





En appliquant le principe général de dénombrement (ou principe du produit) le nombre des cas possibles (ou des éventualités) est : $6 \times 6 = 36$.

2. Déterminer le nombre des cas possibles (ou des éventualités) tel que le 1^{er} lancer donne un nombre paire .

- Le 1^{er} lancer a 3 choix (ou cas possibles sont 2 ou 4 ou 6) .
- Le 2^{ème} lancer a 6 choix (ou cas possibles tous les résultats sont acceptés) .

En appliquant le principe général de dénombrement (ou principe du produit) le nombre des cas possibles (ou des éventualités) est : $3 \times 6 = 18$.

Exemple 2 :

Une pièce de monnaie a deux faces : une face sera désigner par **P** (pile) l'autre face sera désigner par **F** (face) .

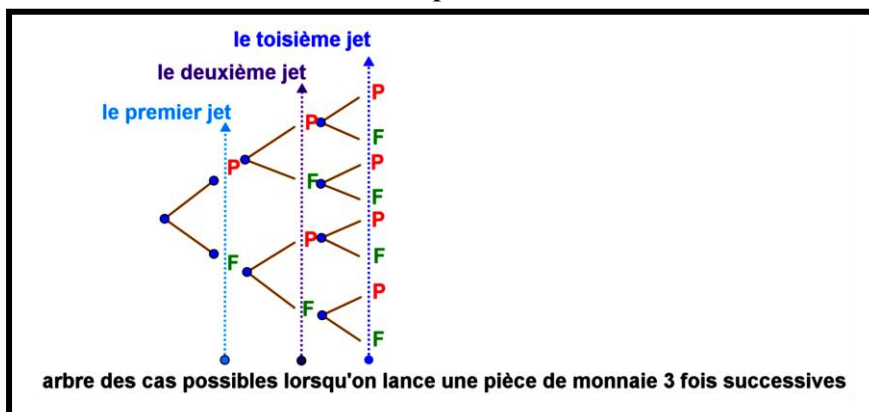
On lance dans l'air la pièce de monnaie 3 fois successives (si le 1^{er} lancer donne P et la 2^{ème} lancer donne F et la 3^{ème} lancer donne P cet éventualité (ou cas possible) sera noté **PFP** .

1. On détermine le nombre des cas possibles :

- Le 1^{er} lancer a 2 choix (ou cas possibles) .
- Le 2^{ème} lancer a 2 choix (ou cas possibles) .
- Le 3^{ème} lancer a 2 choix (ou cas possibles) .

En appliquant le principe général de dénombrement (ou principe du produit) le nombre des cas possibles (ou des éventualités) est : $2 \times 2 \times 2 = 8$.

2. On donne l'arbre des cas possibles :



III.

Arrangement avec répétition :

a. Activité :

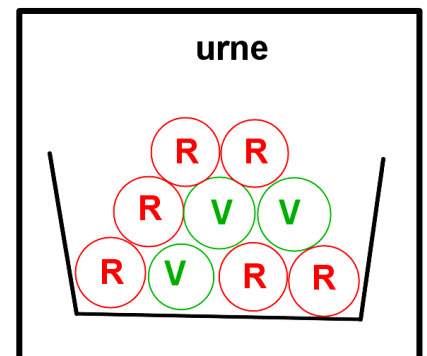
une urne contient 6 boules rouges et 3 boules vertes.
On tire 2 boules de l'urne l'une après l'autre et avec remise (c.à.d. la boule tiré doit être remettre à l'urne avant de tiré la boule suivante) on dit tirage avec remise .

Questions :

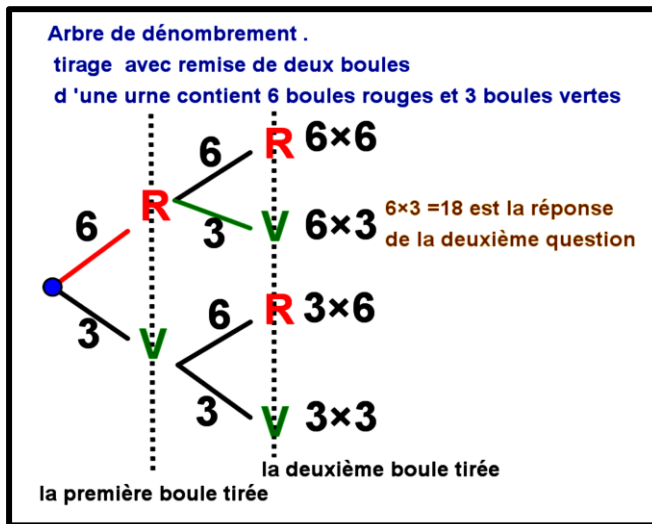
1. Quel le nombre des tirages possibles ?
2. Quel le nombre des tirages tel que la première boule tirée est rouge et la 2^{ème} est verte ?

Correction :

1. le nombre des tirages possibles (ou les cas possibles)
 - ✓ la 1^{ère} boule tirée a 9 manières d'être tiré .
 - ✓ la 2^{ème} boule tirée a 9 manière d'être tiré .
 - ✓ d'après le principe général de dénombrement le nombre des tirages possibles est $9 \times 9 = 9^2$



2. le nombre des tirages tel que la première boule tirée est rouge et la 2^{ème} est verte .
- ✓ la 1^{ère} boule tirée a 6 manières d'être tirée .
 - ✓ la 2^{ème} boule tirée a 3 manières d'être tirée .
 - ✓ d'après le principe général de dénombrement le nombre des tirages possibles est $6 \times 3 = 18$
3. On donne l'arbre des cas possibles :



b. Propriété :

Le nombre des arrangements avec répétition de p éléments parmi n éléments est le nombre n^p .

c. Remarque :

On représente une arrangement avec répétition de p éléments parmi les éléments suivants X_1 et X_2 et X_3 et X_n par :

Numéro du classement (N° d'ordre)	1	2	3		$p-1$	p
L'élément qui a ce classement (On a le droit de répéter les éléments)	X_5	X_2	X_7		X_7	X_3

IV.

Arrangement sans répétition de p éléments parmi n éléments :

a. Activité :

Course de marathon entre 4 athlètes nommés de la manière suivante A et B et C et D .

A la fin de la course , deux prix sont distribués de la façon suivante :

- ✓ 50 000 dh pour le vainqueur de la course (la 1^{ère} place) .
- ✓ 10 000 dh pour l'athlète qui a obtenue la 2^{ème} place.
- ✓ Sachant qu'à la fin de la course chaque place est occupée par un seul athlète .

1. On donne un exemple de distribuer les deux prix

On suppose que le premier prix est arraché par l'athlète D et le 2^{ème} prix est obtenue par B .

Cet exemple sera présenté de la manière suivante $\begin{matrix} 1 & 2 \\ \text{D} & \text{B} \end{matrix}$ ou DB ou $\begin{matrix} \text{D} & \text{B} \\ \text{B} & \text{D} \end{matrix}$

Remarque : Le résultat DB n'est pas identique au résultat BD .

b. Vocabulaire :



chaque résultat obtenue à la fin de la course s'appelle arrangement sans répétition de 2 éléments parmi 4 éléments .

c. Définition :

Ordonné p éléments avec répétition parmi n éléments (répétition = avec possibilité de répéter les éléments) s'appelle arrangement avec répétition de p éléments parmi n éléments .

d. Propriété :

- Le nombre des arrangements avec répétition de p éléments parmi n éléments est le nombre :

$$A_n^p = \underbrace{n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times (n-p+1)}_p = \frac{n!}{(n-p)!} \text{ (avec } 0 \leq p \leq n \text{ et } n \in \mathbb{N} \text{ et } p \in \mathbb{N} \text{)}$$

- Le nombre suivant : $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times n$ par $n! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times n$ on lit : factoriel n ($n \in \mathbb{N}^*$) avec $0! = 1$; $1! = 1$.

e. Remarque :

- Pour calculer $n!$ on peut utiliser calculatrice scientifique la touche suivante
- $A_n^0 = 1$ et $A_n^1 = n$ et $A_n^2 = \underbrace{n(n-1)}_2$ et $A_n^3 = \underbrace{n(n-1)(n-2)}_3$
- On représente un arrangement sans répétition de p éléments parmi les éléments suivants X_1 et X_2 et X_3 et X_n par la manière suivante :

La touche

nPr

Numéro du classement (N° ordre)	1	2	3		p-1	p
L'élément qui a ce classement (On obtient un arrangement sans répétition)	X_5	X_2	X_7		X_1	X_3

f. Modèle d'une urne ou un sac contient (des boules ou des jetons ou des pions)

Une urne contient n boules lorsque on tire p boules l'une après l'autre et sans remise (c.à.d. la boule tiré doit être à l'extérieure de l'urne avant de tiré la boule suivante) on dit tirage sans remise .

Exemple : une urne contient 6 boules rouges et 3 boules vertes .

Questions :

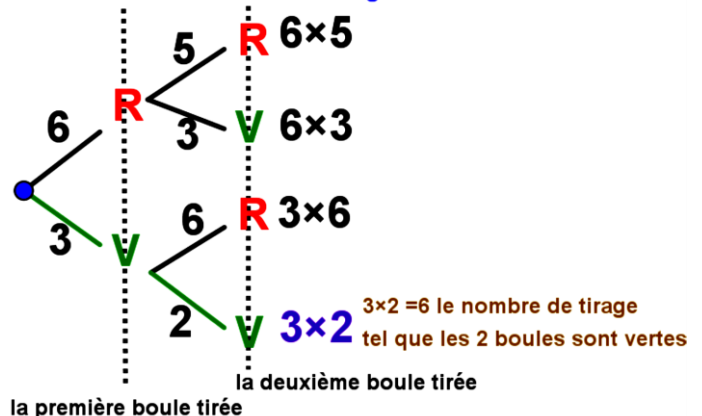
- Quel le nombre des tirages possibles ?
- Quel le nombre des tirages tel que les deux boules sont vertes ?

Réponse : 1^{ère} Q. $A_9^2 = 9 \times 8$ 2^{ième} Q. $A_3^2 = 3 \times 2$

Arbre de dénombrement .

tirage sans remise de deux boules

d'une urne contient 6 boules rouges et 3 boules vertes





V. Permutation de n éléments c.à.d. : arrangement sans répétition de n éléments parmi n éléments :

a. Définition :

Ordonné n éléments sans répétition parmi n éléments (c.à.d. pas de possibilité de répéter les éléments) s'appelle permutation de n éléments .

b. Propriété :

Le nombre des permutation de n éléments est le nombre $A_n^n = n!$.(avec $n \in \mathbb{N}$) .

c. Remarque :

- Pour calculer $n!$ on peut utiliser calculatrice scientifique la touche suivante

La touche

$n!$

- On représente une permutation de n éléments parmi les éléments : X_1 et X_2 et .. X_n par

Numéro du classement	1	2	3		n-1	n
L'élément qui a ce classement (On obtient une permutation)	X_4	X_2	X_8		X_1	X_{n-3}

d. Exemple :

Course de marathon entre 4 athlètes nommés de la manière suivante A et B et C et D .

A la fin de la course , quatre prix sont distribués de la façon suivante :

- ✓ 50 000 dh pour le vainqueur de la course (la 1^{ère} place) .
- ✓ 40 000 dh pour l'athlète qui a obtenue la 2^{ème} place.
- ✓ 30 000 dh pour l'athlète qui a obtenue la 3^{ème} place.
- ✓ 20 000 dh pour l'athlète qui a obtenue la 4^{ème} place.
- ✓ Sachant qu'à la fin de la course chaque place est occupé par un seul athlète .

1. On donne un exemple de distribuer les deux prix

On suppose que le premier prix est arraché par l'athlète D et le 2^{ème} prix est obtenue par B et et le 3^{ème} prix est obtenue par C et et le 4^{ème} prix est obtenue par A .

Cet exemple sera présenté de la manière suivante 1 2 3 4 ou DBCA ou

D B C A

Remarque : Le résultat DBCA n'est pas identique au résultat ABCD .

D	B	C	A
le premier prix	le deuxième prix	le troisième prix	le quatrième prix

VI. Combinaison de p éléments parmi n éléments :

a. Activité :

Soit l'ensemble $E = \{a, b, c, d, f\}$ on donne une partie de E . Par exemple $A = \{b, d\}$ et $B = \{a, c, f\}$ et $H = \emptyset$

- La partie $A = \{b, d\}$ est appelée aussi combinaison de 2 parmi 5 .
- La partie $B = \{a, c, f\}$ est appelée aussi combinaison de 3 parmi 5 .
- La partie $H = \emptyset$ est appelée aussi combinaison de 0 parmi 5

b. Définition :

E est un ensemble fini ($\text{card}E = n$) toute partie A de E contient p éléments (avec $(p \leq n)$) s'appelle combinaison de p éléments parmi n éléments .



c. Propriété :

Le nombre des combinaisons p éléments ($p \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$) parmi n éléments est le nombre

$$\text{entier naturel : } C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{(n-p)!p!} = \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times (n-p+1)}{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times p}.$$

(avec $0 \leq p \leq n$ et $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$).

d. Exemple :

$$C_7^3 = \frac{7 \times 6 \times 5}{1 \times 2 \times 3} = 35.$$

e. Modèle d'une urne ou un sac contient (des boules ou des jetons ou des pions

une urne contient 6 boules rouges et 3 boules vertes.

On tire simultanément 2 boules de l'urne.

Questions :

1. Quel le nombre des tirages possibles ?

2. Quel le nombre des tirages tel que les 2 boules tirés sont de couleurs différentes

Correction :

1. le nombre des cas possibles

1. Calculons $\text{card}\Omega$.

Le tirage simultanément de 2 boules parmi 9 boules représente une combinaison de 2 parmi 9 , d'où le nombre des cas possibles est le nombre des combinaisons de 2 parmi 9 donc :

$$\text{card}\Omega = C_9^2 = \frac{9 \times 8}{1 \times 2} = 36.$$

Conclusion : le nombre des tirages possibles est 36 tirages possibles .

2. le nombre des tirages tel que les 2 boules tirés sont de couleurs différentes :

on considère **A** « Les deux boules tirés sont de couleurs différentes »

On calcule $\text{card}A$

- **A** « Les deux boules tirés sont de couleurs différentes » ou encore
- A « une boule rouge et l'autre verte »

• une boule rouge parmi 6 boules rouges donc $C_6^1 = 6$ manière différentes .

• une boule verte parmi 3 boules vertes donc $C_3^1 = 3$ manière différentes .

$$\text{donc : } \text{card}A = C_6^1 \times C_3^1 = 18.$$

Conclusion : le nombre des tirages tel que les 2 boules tirés sont de couleurs différentes est 18 tirages qui réalise A .

f. Remarque :

- Pour calculer C_n^p on peut utiliser calculatrice scientifique la touche suivante
- $C_n^0 = C_n^n = 1$ et $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$.

La touche

nCr



- $C_n^p = C_n^{n-p}$ (avec $0 \leq p \leq n$ et $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$).

donc le nombre des manières de choisir 2 responsables d'une classe de 40 élèves est égale au nombre des manières de choisir 38 responsables d'une classe de 40 élèves

- relation de Pascal : $C_n^p + C_n^{p+1} = C_{n+1}^{p+1}$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$ et $0 \leq p \leq n-1$.

$\begin{matrix} p \\ n \end{matrix}$	0	1	2	3	4	5	6	...	p	p+1	...	n-1	n	n+1
0	1													
1	1	1												
2	1	2	1											
3	1	3	3	1										
4	1	4	6	4	1									
5	1	5	10	10	5	1								
6	1	6	15	20	15	6	1							
⋮	⋮							1						
p	1								1					
p+1	1									1				
⋮	⋮										1			
n-1	1									1		1		
n	1								C_n^p	C_n^{p+1}			1	
n+1	1										C_{n+1}^{p+1}			1

VII. binôme de Newton :

a. Théorème :

Soient a et b de $\mathbb{R}$ on a : $\forall n \in \mathbb{N}^* : (a+b)^n = \sum_{i=0}^n C_n^i a^{n-i} b^i = \sum_{i=0}^n C_n^i a^i b^{n-i}$. (car $a+b=b+a$)

b. Exemple :

$$(x+2)^4 = \sum_{i=0}^4 C_4^i x^i 2^{4-i} = C_4^0 x^0 2^4 + C_4^1 x^1 2^3 + C_4^2 x^2 2^2 + C_4^3 x^3 2^1 + C_4^4 x^4 2^0 = 1 \times 2^4 + 4x \times 2^3 + 6x^2 \times 2^2 + 4x^3 \times 2^1 + 1x^4$$