Géométrie dans l'espace

Forme analytique du :

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$

Soient $\vec{u}(x,y,z)$ et $\vec{v}(x',y',z')$

- **-Produit scalaire :** $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz'$
- **-Norme d'un vecteur :** $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2+y^2}$
- **- Distance :** $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$
- **– Produit vectoriel :** $\vec{u}\wedge\vec{v} = \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix}\vec{\imath} - \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix}\vec{\jmath} + \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}\vec{k}$

propriétés

- $\vec{u}\perp\vec{v} \iff \vec{u}.\vec{v}=0$
- $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *sont colinéaires* $\iff \vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{0}$

Droite $D(A,\vec{u})$ passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}(a,b,c)$

Représentation paramétrique de la droite (D) : $\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \quad (t\in IR) \\ z = z_A + ct \end{cases}$

Distance d'un point M à la droite (D) : $d(M,(D)) = \dfrac{\|\overrightarrow{AM}\wedge\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$

Plan dans l'espace

Equation cartésienne d'un plan (P)

$(P):\ ax+by+cz+d=0$

$\iff \vec{n}(a,b,c)$ *est un vecteur normal au plan* (P)

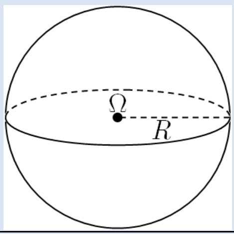
Distance d'un point Ω au plan (P) : $d(\Omega,(P)) = \dfrac{|ax_\Omega+by_\Omega+cz_\Omega+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

Si les points A et B et C ne sont pas colinéaires alors $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal au plan (ABC)

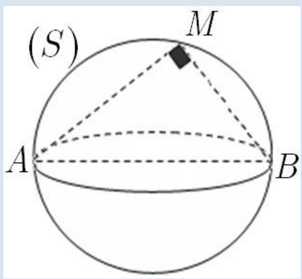
Sphère

Equation cartésienne d'une sphère (S) de centre $\Omega(a,b,c)$ et de rayon R :

(S) : $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 = R^2$

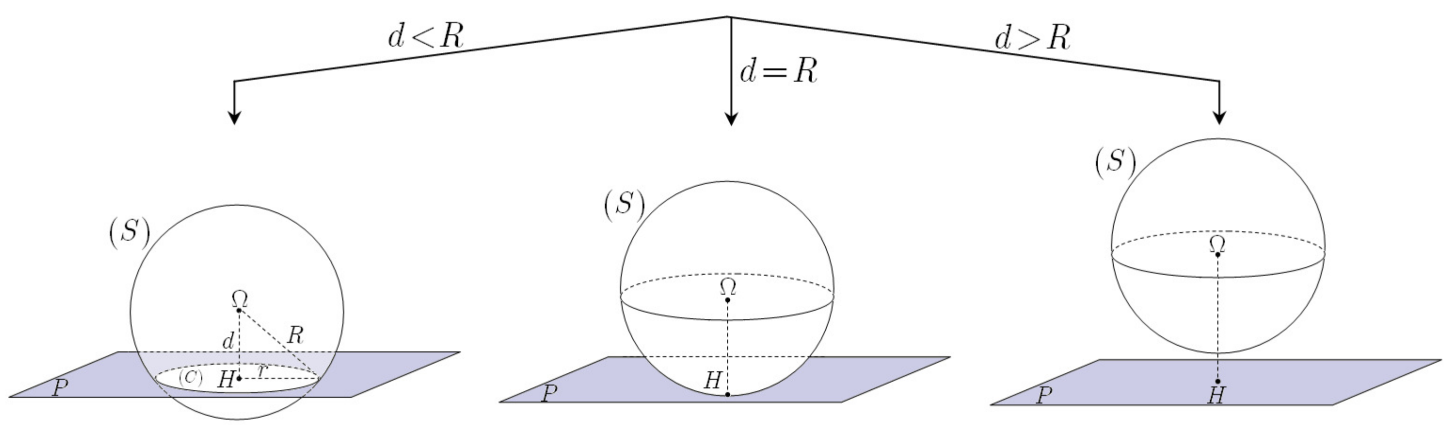


➢ On détermine l'équation cartésienne d'une sphère (S) dont $[AB]$ est l'un de ses diamètres en utilisant l'équivalence suivant : $M\in(S) \iff \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0$



❖ Intersection d'une sphère $S(\Omega, R)$ et d'un plan (P) :

Soit H le projeté orthogonal du centre Ω sur le plan (P) , on pose $d = \Omega H = d(\Omega, (P))$



Le plan (P) coupe la sphère (S) suivant un cercle de centre H et de rayon $r = \sqrt{R^2 - d^2}$

Le plan (P) est tangent à la sphère (S) en H

Le plan (P) ne coupe pas la sphère (S)

Equation cartésienne d'un plan (P) tangent à une sphère S(Ω ,R) en un point A

Méth1 :

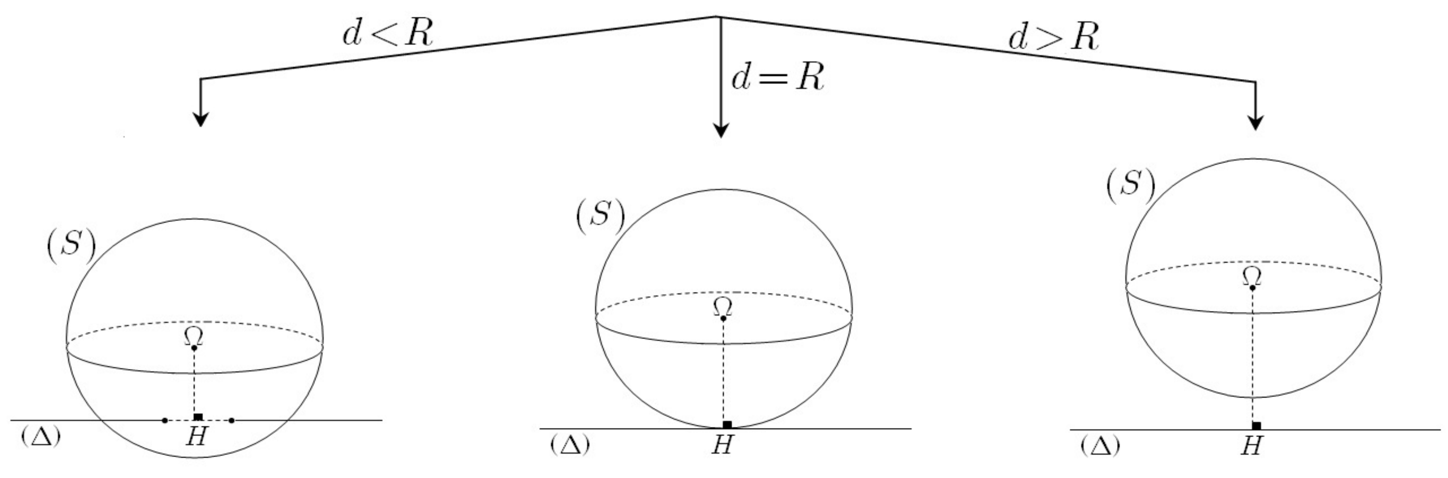
on utilise l'équivalence : $M(x, y, z) \in (P) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{A\Omega} = 0$

Méth2 :

$\overrightarrow{A\Omega}$ est un vecteur normal au plan (P) … etc

❖ Intersection d'une sphère $S(\Omega, R)$ et d'une droite (D) :

Soit H le projeté orthogonal du centre Ω sur la droite (D) , on pose $d = \Omega H = d(\Omega, (D))$



La droite (D) coupe la sphère (S) en deux points distincts

La droite (D) est tangente à la sphère (S) en H

La droite (D) ne coupe pas la sphère (S)

L'aire d'un triangle ABC :

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\|$$

l'aire d'un parallélogramme ABCD :

$$S_{ABCD} = \left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\|$$