

↳ Expression analytique du produit scalaire dans un repère orthonormé :

l'espace V_3 muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs tel que : $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ et $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$.

$$\checkmark \vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$$

$$\checkmark \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$$

↳ Norme d'un vecteur - distance entre deux points :

Soient $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$ deux points de l'espace.

$$\text{On a : } AB = \|\vec{AB}\| = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2}.$$

↳ Equation cartésienne d'un plan définie par un point et un vecteur normal :

Soit $\vec{n}(a, b, c)$ un vecteur non nul, et $A(x_A, y_A, z_A)$ un point de l'espace.

L'ensemble des points M de l'espace qui vérifient : $\vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$, est le plan (P) passant par A et de vecteur normal \vec{n} . Une équation cartésienne de ce plan, s'écrit sous la forme : $ax + by + cz + d = 0$ ou d est un nombre réel.

↳ Distance d'un point à un plan :

Soit (P) plan d'équation cartésienne : $ax + by + cz + d = 0$ et $A(x_A, y_A, z_A)$ un point de l'espace. La distance du point A au plan (P) est : $d(A; (P)) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

Exemple :

Calculons la distance du point $A(-1, 1, 2)$ au plan (P) d'équation $x - 2y - 2z + 4 = 0$.

$$\text{On a : } d(A; (P)) = \frac{|x_A - 2y_A - 2z_A + 4|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-2)^2}} = \frac{|-3|}{\sqrt{9}} = 1. \quad \text{donc : } d(A; (P)) = 1$$

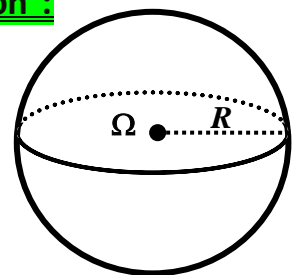
↳ Etude analytique de la sphère :

Equation cartésienne d'une sphère définie par le centre et le rayon :

Une équation de la sphère (S) de centre $\Omega(a, b, c)$ et de rayon R avec $(R > 0)$. Est :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2 \quad \text{que l'on peut écrire :}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0 \quad \text{ou } d = a^2 + b^2 + c^2 - R^2.$$



Equation cartésienne d'une sphère définie par l'un de ces diamètres :

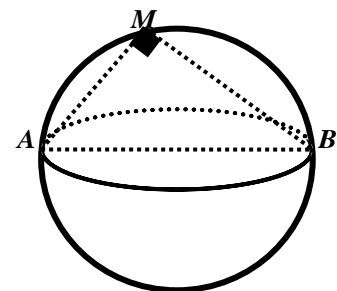
Soit A et B deux points de l'espace tel que : $(A \neq B)$.

L'ensemble des points M de l'espace tels que : $\vec{AM} \cdot \vec{BM} = 0$ est la sphère dont $[AB]$ est l'un de ces diamètres.

Une équation cartésienne de cette sphère est :

$$(x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) + (z - z_A)(z - z_B) = 0$$

avec $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$.



Etude de analytique de l'ensemble des points $M(x, y, z)$ tels que :

$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0.$$

Soit a, b, c et d quatre nombres réels tels que $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ et (S) l'ensemble des points $M(x, y, z)$ de l'espace qui vérifient : $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$.

$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0 \Leftrightarrow x^2 + ax + y^2 + by + z^2 + cz + d = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{c}{2}\right)^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2 + d = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{c}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 - d$$

Si : $\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 - d > 0$: l'ensemble des points $M(x, y, z)$ est la sphère (S) de centre

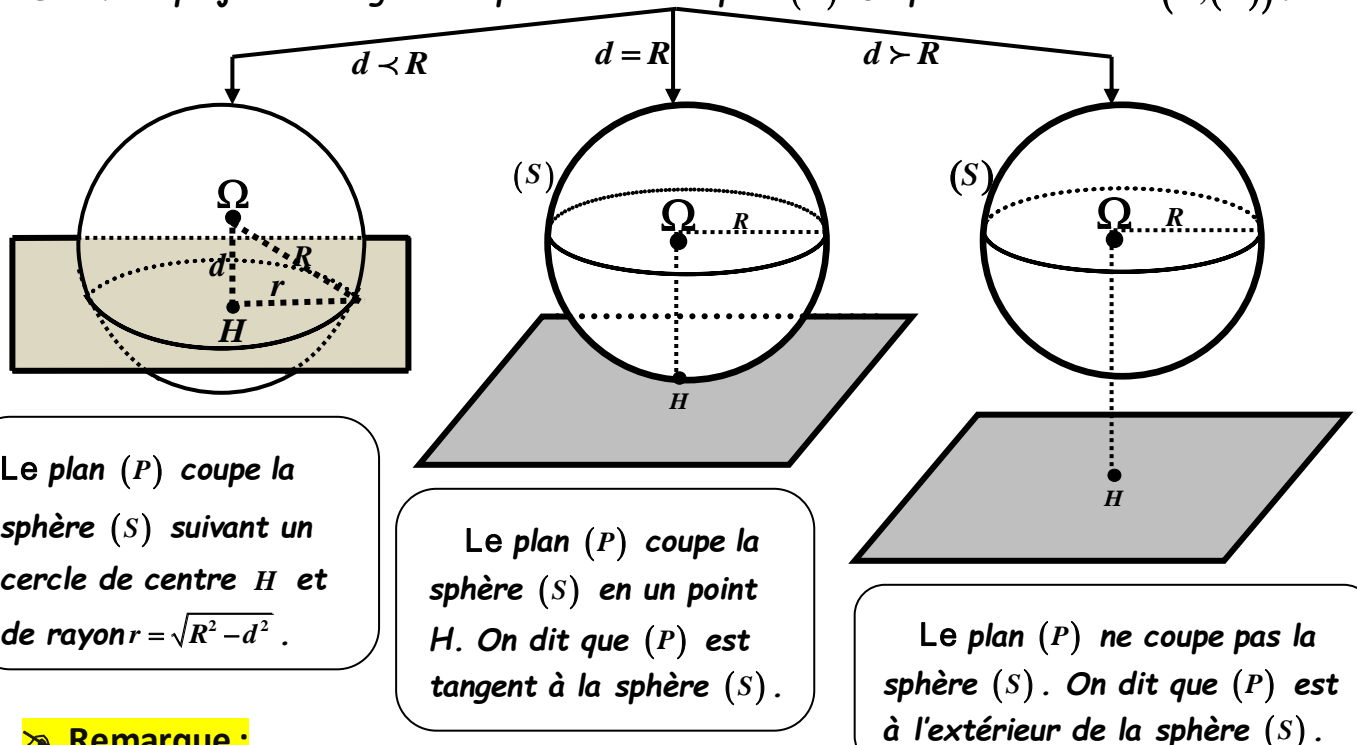
$$\Omega\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, -\frac{c}{2}\right) \text{ et rayon } R = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 - d}.$$

Si : $\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 - d = 0$: (S) est l'ensemble $\left\{\Omega\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, -\frac{c}{2}\right)\right\}$.

Si : $\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 - d < 0$: (S) est l'ensemble vide.

Intersection d'une sphère $S(\Omega, R)$ et un plan (P) : $ax + by + cz + d = 0$:

Soit H le projeté orthogonal du point Ω sur le plan (P) . On pose $d = \Omega H = d(A; (P))$.



Remarque :

Pour déterminer les coordonnées du point H , on résout le système d'équation du plan (P) et la représentation paramétrique droite (D) , tel que (D) est la droite passant par Ω et orthogonale au plan (P) .

↳ Expression analytique du produit vectoriel dans un repère orthonormé direct :

l'espace V_3 est muni d'une base orthonormée directe $(\vec{o}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit $\vec{u}(x, y, z)$ et $\vec{v}(x', y', z')$ deux vecteurs de l'espace.

$$\checkmark \vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{w} \text{ tel que : } \vec{u} \perp \vec{w} \text{ et } \vec{v} \perp \vec{w}.$$

$$\checkmark \vec{u} \wedge \vec{v} = -(\vec{v} \wedge \vec{u}).$$

$$\checkmark \vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}.$$

$$\checkmark \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{0} \Leftrightarrow \text{Les points } A, B \text{ et } C \text{ sont alignés.}$$

$$\checkmark \vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \vec{k}.$$

↳ L'aire d'un triangle – l'aire d'un parallélogramme :

$$\checkmark \text{ Soit } ABC \text{ un triangle, son aire est : } S_{ABC} = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|.$$

$$\checkmark \text{ Soit } ABCD \text{ un parallélogramme, son aire est : } S_{ABCD} = \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|.$$

↳ Distance d'un point à une droite :

Soit (D) la droite dirigée par $\vec{u}(a, b, c)$ et passant par $A(x_A, y_A, z_A)$ et M un point de l'espace.

$$\text{La distance du point } M \text{ et la droite } (D) \text{ est : } d(M; D(A, \vec{u})) = \frac{\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}.$$

Si les points A, B et C ne sont pas alignés, donc le vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est orthogonale au plan (ABC) . Dans ce cas l'équation du plan (ABC) s'écrit sous la forme :

$$M \in (ABC) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) = 0$$