

## **Expression analytique du produit scalaire dans un repère orthonormé :**

l'espace  $V_3$  muni d'un repère orthonormé directe  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs tel que :  $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$  et  $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$ .

$$\checkmark \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$$

$$\checkmark \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$$

## **Norme d'un vecteur - distance entre deux points :**

Soient  $A(x_A, y_A, z_A)$  et  $B(x_B, y_B, z_B)$  deux points de l'espace.

$$On a : AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2}.$$

## **Equation cartésienne d'un plan définie par un point et un vecteur normal :**

Soit  $\vec{n}(a, b, c)$  un vecteur non nul, et  $A(x_A, y_A, z_A)$  un point de l'espace.

L'ensemble des points  $M$  de l'espace qui vérifient :  $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ , est le plan  $(P)$  passant par  $A$  et de vecteur normal  $\vec{n}$ . Une équation cartésienne de ce plan, s'écrit sous la forme :  $ax + by + cz + d = 0$  où  $d$  est un nombre réel.

## **Distance d'un point à un plan :**

Soit  $(P)$  plan d'équation cartésienne :  $ax + by + cz + d = 0$  et  $A(x_A, y_A, z_A)$  un point de l'espace. La distance du point  $A$  au plan  $(P)$  est :  $d(A; (P)) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ .

### **Exemple :**

Calculons la distance du point  $A(-1, 1, 2)$  au plan  $(P)$  d'équation  $x - 2y - 2z + 4 = 0$ .

$$On a : d(A; (P)) = \frac{|x_A - 2y_A - 2z_A + 4|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-2)^2}} = \frac{|-3|}{\sqrt{9}} = 1. \quad donc : d(A; (P)) = 1$$

## **Etude analytique de la sphère :**

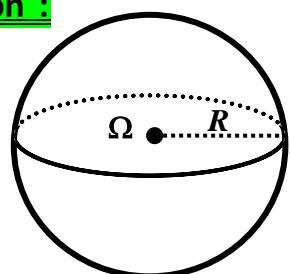
### **Equation cartésienne d'une sphère définie par le centre et le rayon :**

Une équation de la sphère  $(S)$  de centre

$\Omega(a, b, c)$  et de rayon  $R$  avec  $(R > 0)$ . Est :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2 \text{ que l'on peut écrire :}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0 \text{ ou } d = a^2 + b^2 + c^2 - R^2.$$



### **Equation cartésienne d'une sphère définie par l'un de ses diamètres :**

Soit  $A$  et  $B$  deux points de l'espace tel que :  $(A \neq B)$ .

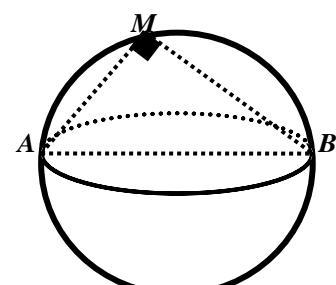
L'ensemble des points  $M$  de l'espace tels que :  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$

est la sphère dont  $[AB]$  est l'un de ces diamètres.

Une équation cartésienne de cette sphère est :

$$(x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) + (z - z_A)(z - z_B) = 0$$

avec  $A(x_A, y_A, z_A)$  et  $B(x_B, y_B, z_B)$ .



**Etude de l'analytique de l'ensemble des points  $M(x, y, z)$  tels que :**

$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$$

Soit  $a, b, c$  et  $d$  quatre nombres réels tels que  $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$  et  $(S)$  l'ensemble des points  $M(x, y, z)$  de l'espace qui vérifient :  $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$ .

$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0 \Leftrightarrow x^2 + ax + y^2 + by + z^2 + cz + d = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{c}{2}\right)^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2 + d = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{c}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 - d$$

**Si :**  $\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 - d > 0$  : l'ensemble des points  $M(x, y, z)$  est la sphère  $(S)$  de centre

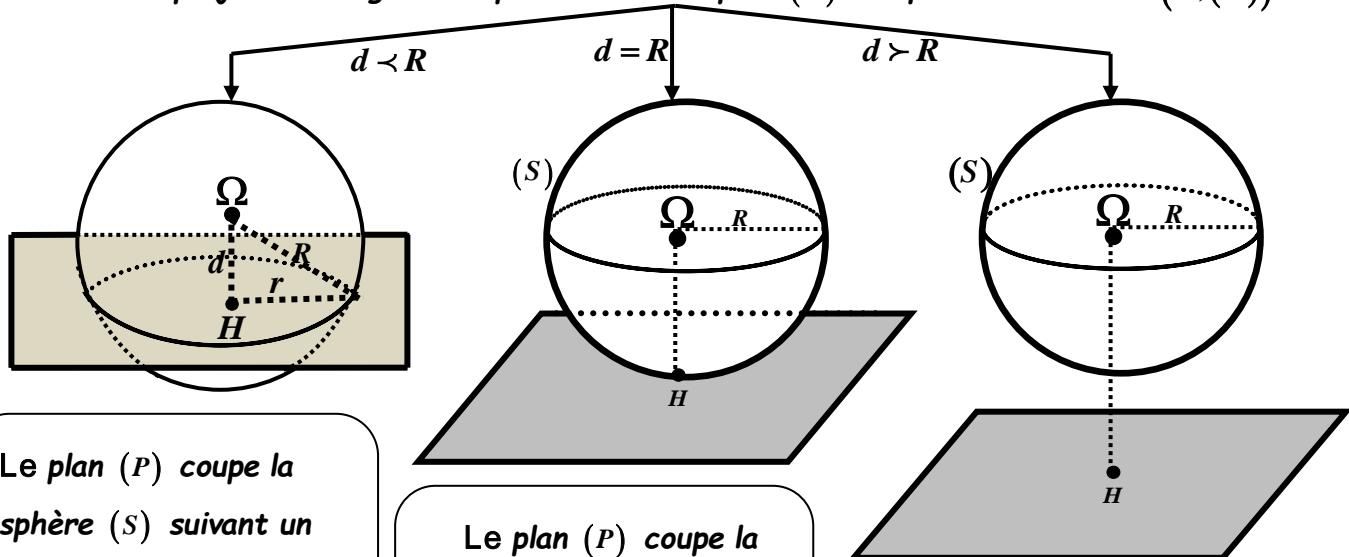
$$\Omega\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, -\frac{c}{2}\right) \text{ et rayon } R = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 - d}.$$

**Si :**  $\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 - d = 0$  :  $(S)$  est l'ensemble  $\left\{\Omega\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, -\frac{c}{2}\right)\right\}$ .

**Si :**  $\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 - d < 0$  :  $(S)$  est l'ensemble vide.

**Intersection d'une sphère  $S(\Omega, R)$  et un plan  $(P)$ :  $ax+by+cz+d=0$  :**

Soit  $H$  le projeté orthogonal du point  $\Omega$  sur le plan  $(P)$ . On pose  $d = \Omega H = d(A; (P))$ .



Le plan  $(P)$  coupe la sphère  $(S)$  suivant un cercle de centre  $H$  et de rayon  $r = \sqrt{R^2 - d^2}$ .

Le plan  $(P)$  coupe la sphère  $(S)$  en un point  $H$ . On dit que  $(P)$  est tangent à la sphère  $(S)$ .

Le plan  $(P)$  ne coupe pas la sphère  $(S)$ . On dit que  $(P)$  est à l'extérieur de la sphère  $(S)$ .

**Remarque :**

Pour déterminer les coordonnées du point  $H$ , on résoudre le système d'équation du plan  $(P)$  et la représentation paramétrique droite  $(D)$ , tel que  $(D)$  est la droite passant par  $\Omega$  et orthogonale au plan  $(P)$ .

## **Expression analytique du produit vectoriel dans un repère orthonormé direct :**

l'espace  $V_3$  est muni d'une base orthonormé directe  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

Soit  $\vec{u}(x, y, z)$  et  $\vec{v}(x', y', z')$  deux vecteurs de l'espace.

$$\checkmark \quad \vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{w} \text{ tel que : } \vec{u} \perp \vec{w} \text{ et } \vec{v} \perp \vec{w}. \quad \checkmark \quad \vec{u} \wedge \vec{v} = -(\vec{v} \wedge \vec{u}).$$

$$\checkmark \quad \vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}.$$

$$\checkmark \quad \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{0} \Leftrightarrow \text{Les points } A, B \text{ et } C \text{ sont alignés.}$$

$$\checkmark \quad \vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \vec{k}.$$

## **L'aire d'un triangle – l'aire d'un parallélogramme :**

$$\checkmark \quad \text{Soit } ABC \text{ un triangle, son aire est : } S_{ABC} = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|.$$

$$\checkmark \quad \text{Soit } ABCD \text{ un parallélogramme, son aire est : } S_{ABCD} = \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|.$$

## **Distance d'un point à une droite :**

Soit  $(D)$  la droite dirigé par  $\vec{u}(a, b, c)$  et passant par  $A(x_A, y_A, z_A)$  et  $M$  un point de l'espace.

$$\text{La distance du point } M \text{ et la droite } (D) \text{ est : } d(M; D(A, \vec{u})) = \frac{\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}.$$

Si les points  $A, B$  et  $C$  ne sont pas alignés, donc le vecteur  $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$  est orthogonale au plan  $(ABC)$ . Dans ce cas l'équation du plan  $(ABC)$  s'écrit sous la forme :

$$M \in (ABC) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) = 0$$