# Géométrie analytique dans l'espace

## 1) Rappel

- La norme d'un vecteur $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ est le nombre réel positif $\|\vec{u}\|=AB$.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont le même sens, alors $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de sens contraire, alors $\vec{u}\cdot\vec{v}=-\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls, alors: $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos\left(\overline{\vec{u},\vec{v}}\right)$
- Si $H$ est le projeté orthogonal de $C$ sur $(AB)$, alors $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}$
- Le produit scalaire $\vec{u}\cdot\vec{u}$ est appelé carré scalaire de $\vec{u}$ et noté $\vec{u}^2=\|\vec{u}\|^2$.
- $\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.
- Si $\vec{u}$ , $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs et $k$ un nombre réel. On a :
  - ✓ $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$ ; $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$ ; $\vec{u}\cdot(k\vec{v})=k(\vec{u}\cdot\vec{v})$
  - ✓ $(\vec{u}\pm\vec{v})^2=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2\pm2\vec{u}\cdot\vec{v}$ et $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})=\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2$

***Dans tout le reste, on considère que le plan est muni d'un repère orthonormé*** .

Soient $\vec{u}(a;b;c)$ ; $\vec{v}(a';b';c')$ et $\vec{w}(a'';b'';c'')$ deux vecteurs exprimés dans la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on a :

- $\vec{u}\cdot\vec{v}=aa'+bb'+cc'$ et $\vec{u}\cdot\vec{u}=a^2+b^2+c^2=\|\vec{u}\|^2$ *donc* $\|\vec{u}\|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$
- $\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=a\begin{vmatrix}b' & b''\\ c' & c''\end{vmatrix}-b\begin{vmatrix}a' & a''\\ c' & c''\end{vmatrix}+c\begin{vmatrix}a' & a''\\ b' & b''\end{vmatrix}$ .
- $\overrightarrow{AB}\left(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A\right)$ et $AB=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$
- Le système : $\begin{cases}x=x_A+at\\ y=y_A+bt \quad / t\in IR\\ z=z_A+ct\end{cases}$ est une représentation paramétrique de la droite $D(A;\vec{u})$.

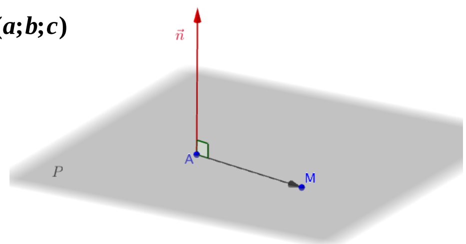
## 2) Plan et vecteur normal.

### a) *Vecteur normal à un plan.*

**Définition** :Soit **(*D*)** une droite perpendiculaire à un plan **(*P*)**, tout vecteur non nul directeur de **(*D*)** est appelé vecteur **normal** à **(*P*).**

### b) *Equation d'une droite définie par un point A et un vecteur normal* $\vec{n}(a;b;c)$

**Théorème** : Soit $A$ un point et $\vec{n}$ un vecteur non nul.
L'ensemble des points $M$ du plan tels que $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AM}=0$ est la droite de vecteur normal $\vec{n}$ et passant par $A$.




- **Théorème** : soit $\vec{n}(a;b;c)$ un vecteur non nul avec $(a;b;c)\neq(0;0;0)$. et $d$ un nombre réel.
- Une droite admettant $\vec{n}(a;b;c)$ comme vecteur normal a une équation de la forme $ax+by+cz+d=0$.
- Réciproquement : tout plan d'équation $ax+by+cz+d=0$ admet $\vec{n}(a;b;c)$ comme vecteur normal.

**Remarque** :

- Deux plans dites orthogonales si leurs vecteurs normaux sont orthogonaux.
- Deux plans dites parallèles si leurs vecteurs normaux sont colinéaires.

### c) *Distance d'un point à un plan.*

**Propriété**: Considérons un point $A(x_A,y_A,z_A)$ et un plan $(P): ax+by+cz+d=0$

La **distance** du point $A$ au plan $(P)$ est: $d(A,(P))=\dfrac{|ax_A+by_A+cz_A+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

## 3) Sphère.

### a) *Equation cartésienne d'une sphère définie par son centre et son rayon.*

Sachant que l'ensemble des points $M(x;y;z)$ qui vérifient $\Omega M = R\ (avec\ R>0)$ est une sphère de centre $\Omega$ et de rayon $R$. alors on en déduit la propriété suivante

**Propriété** : Le cercle de centre $\Omega(a;b;c)$ et de rayon $R$ a pour équation : $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$

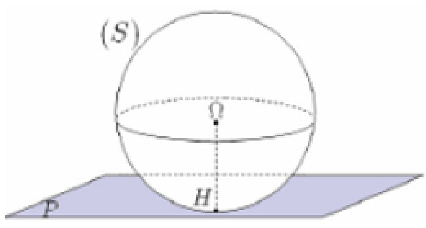
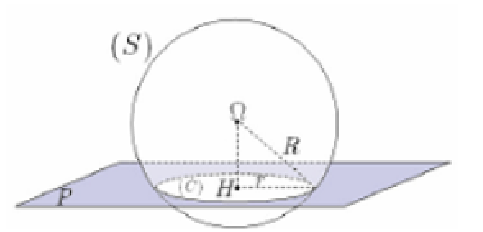
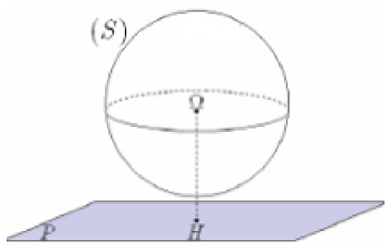
### b) *Equation cartésienne d'une sphère défini par son diamètre.*

**Propriété** : Le cercle de diamètre $[AB]$ est l'ensemble des points $M$ du plan tels que: $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$.

**Remarque :** $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0 \Leftrightarrow (x-x_A)(x-x_B)+(y-y_A)(y-y_B)=0$

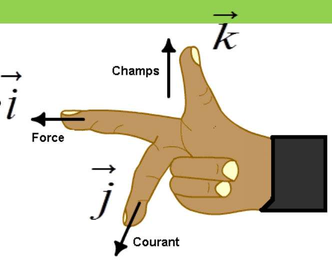
## 4) *Positions Relatives d'un plan et d'une sphère .*

Pour étudier la position relative d'un plan $(P)$ et d'une sphère $(S)$ de centre $\Omega$ et de rayon $R$. Il suffit de comparer $d(\Omega,(P))$ au rayon $R$.

| $d(\Omega,(P))=R$ | $d(\Omega,(P))<R$ | $d(\Omega,(P))>R$ |
|---|---|---|
| Le plan $(P)$ et la sphère $(S)$ ont un seul point commun $H$, le projeté de $\Omega$ sur $(P)$. On dit que le plan $(P)$ est tangent à la sphère $(S)$.  | Le plan $(P)$ coupe la sphère $(S)$ suivant un cercle de centre $H$, le projeté de $\Omega$ sur $(P)$ et de rayon $r=\sqrt{R^2-d^2}$  | Le plan ne coupe pas la sphère  |

## 5) *Produit vectoriel.*

### a) *Orientation de l'espace.*




L'espace doit être **orienté** en adoptant le même point de vue qu'en sciences physiques, on peut notamment utiliser la règle des **trois doigts de la main droite** ou le « **bonhomme d'ampère** » :

On dit alors que le repère est de **sens direct**.

### b) *Notation et définition.*

Le **produit vectoriel** de deux vecteurs **non nuls** $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur, noté $\vec{u}\wedge\vec{v}$ tel que :

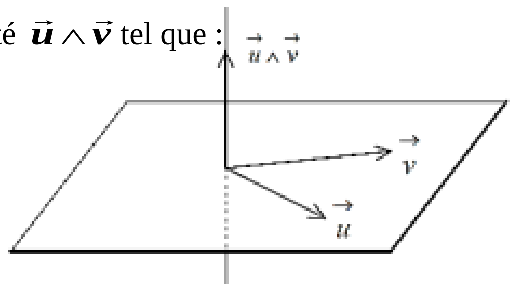
Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** alors $\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{0}$ ;

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires alors :

**1) Direction** : Le vecteur $\vec{u}\wedge\vec{v}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$ .

**2) Le sens** de $\vec{w}=\vec{u}\wedge\vec{v}$ est tel que la base $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ soit de sens direct.

**3) Norme** : $\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\left|\sin\left(\overline{\vec{u};\vec{v}}\right)\right|$.



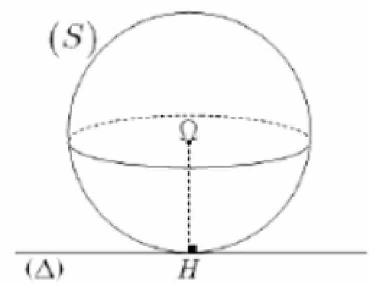
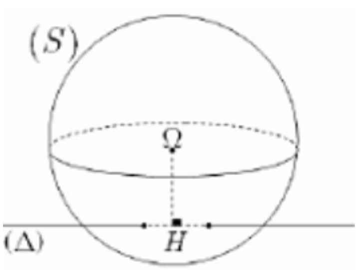
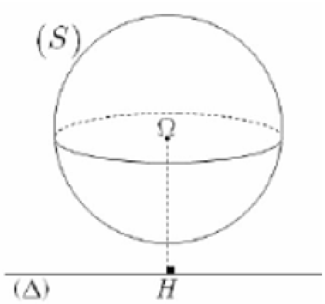
**Remarque** : Le produit *vectoriel* est un **vecteur,** alors que le produit *scalaire* est un **nombre**.

### c) *Propriétés :* Pour tous vecteurs $\vec{u}$ , $\vec{v}$ , $\vec{w}$ et tout nombre réel $a$,

- $(\vec{u}\wedge\vec{v})=-(\vec{v}\wedge\vec{u})$ • $\vec{u}\wedge\vec{0}=\vec{0}$ • $a(\vec{u}\wedge\vec{v})=\vec{u}\wedge(a\vec{v})=(a\vec{u})\wedge\vec{v}$ • $\vec{u}\wedge(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\wedge\vec{v}+\vec{u}\wedge\vec{w}$
- $\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix}\vec{k}$
- Soient la droite $D(A;\vec{u})$ et le point $M$, alors $d(M;(D))=\dfrac{\|\vec{u}\wedge\overrightarrow{AM}\|}{\|\vec{u}\|}$

### d) ***Positions relatives d'une droite et d'une sphère.***

Pour étudier la position relative d'une droite $(\mathbf{D})$ et d'une sphère $(S)$ de centre $\Omega$ et de rayon ***R.*** Il suffit de comparer $d(\Omega,(D))$ au rayon ***R.***

| $d(\Omega,(D)) = \mathbf{R}$ | $d(\Omega,(D)) < R$ | $d(\Omega,(D)) > R$ |
|---|---|---|
| La droite $(\mathbf{D})$ est tangente à la sphère $(S)$.<br><br> | La droite $(\mathbf{D})$ coupe la sphère $(S)$ en deux points différents.<br><br> | La droite $(\mathbf{D})$ ne coupe pas la sphère $(S)$<br><br> |

**<u>Propriété :</u>** L'**aire du triangle** $ABC$ est égale à $\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\|$