I. Approche :

- f est une fonction ; on la note par y .
- f ' est sa dérivée ; on la note par y ' .
- L'écriture $f'(x)=af(x)+b$ on la note par $y'=ay+b$ on l'appelle équation différentielle linéaire de première degré de coefficients constant a et b .
- Toute fonction g dérivable qui vérifie cette équation différentielle ($g'(x)=ag(x)+b$) on l'appelle solution particulière de l' équation différentielle .
- Résoudre une équation différentielle c'est de trouver toutes les fonctions qui vérifie l'équation différentielle (c'est-à-dire de trouver la solution générale) .
- Le programme se limite aux équations différentielles de la formes .
  1. $y'=ay+b$ avec a et b de $\mathbb{R}$
  2. $y''+ay'+by=0$ avec a et b de $\mathbb{R}$.

II. Equation différentielle de la forme $y'=ay+b$ a et b de $\mathbb{R}$:

a. Propriété :

Soit l'équation différentielle (E) : $y'=ay+b$ a et b de $\mathbb{R}$.

- Cas général $a\neq 0$: l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) sont les fonctions de la forme : $f(x)=\alpha\times e^{ax}-\frac{b}{a}$ avec $\alpha\in\mathbb{R}$.
- Cas particulier 1 : $a=0$ et $b=0$ l'équation (E) est $y'=0$ l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) sont les fonctions de la $f(x)=c$.
- Cas particulier 2 : $a=0$ et $b\neq 0$ l'équation (E) est $y'=b$ l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) sont les fonctions de la $f(x)=bx+\alpha$ avec $\alpha\in\mathbb{R}$.

b. Exemples :

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'=4y+5$ donc $a=4$ et $b=5$ d'où : l'ensemble des solutions de l'équation différentielle sont les fonctions de la forme : $f(x)=\alpha\times e^{ax}-\frac{b}{a}=\alpha e^{4x}-\frac{5}{4}$ avec $\alpha\in\mathbb{R}$.
2. $y'=-3y$ donc $a=-3$ et $b=0$ d'où : l'ensemble des solutions de l'équation différentielle sont les fonctions de la forme : $f(x)=\alpha\times e^{ax}-\frac{b}{a}=\alpha e^{-3x}-\frac{0}{4}=\alpha e^{-3x}$ avec $\alpha\in\mathbb{R}$.
3. $y'=7$ donc $a=0$ et $b=7$ d'où : l'ensemble des solutions de l'équation différentielle sont les fonctions de la forme : $f(x)=bx+\alpha=7x+\alpha$ avec $\alpha\in\mathbb{R}$.
4. $y'=0$ donc $a=0$ et $b=0$ d'où : l'ensemble des solutions de l'équation différentielle sont les fonctions de la forme : $f(x)=\alpha$ avec $\alpha\in\mathbb{R}$.

c. Propriété :

l'équation différentielle (E) : $y' = ay + b$ $a \neq 0$ et b de $\mathbb{R}$.

Il existe une et une seule fonction $f(x)$ qui est solution de l'équation (E) et qui vérifie la condition initiale $f(x_0) = y_0$ avec x_0 et $y_0 \in \mathbb{R}$.

d. Exemple :

Déterminer la solution $f(x)$ de l'équation différentielle (E) : $y' = 4y + 5$ qui vérifie la condition initiale $f(-7) = 11$

- D'après l'exemple précédent l'ensemble des solutions de l'équation différentielle sont les fonctions de la forme : $f(x) = \alpha \times e^{ax} - \frac{b}{a} = \alpha e^{4x} - \frac{5}{4}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.
- On détermine fonction qui vérifie la condition initiale $f(-7) = 11$ .on a :

$$\begin{aligned} f(-7) = 11 &\Leftrightarrow \alpha e^{4\times(-7)} - \frac{5}{4} = 11 \\ &\Leftrightarrow \alpha e^{-28} = \frac{49}{4} \\ &\Leftrightarrow \alpha = \frac{49}{e^{-28}} = 49e^{28} \end{aligned}$$

On remarque que : $\alpha = 49e^{28}$ est un nombre réel unique d'où il existe une fonction unique tel que $f(-7) = 11$ c'est la fonction $f(x) = 49e^{28} \times e^{4x} - \frac{5}{4} = 49e^{4x+28} - \frac{5}{4}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

III. Equation différentielle de la forme $y'' + ay' + by = 0$ a et b de $\mathbb{R}$:

a. Définition :

- Equation différentielle de la forme $y'' + ay' + by = 0$ a et b de $\mathbb{R}$ tel que l'inconnue c'est la fonction y avec y' sa dérivée première et y'' sa dérivée seconde s'appelle équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constant sans seconde membre.
- L'équation $r \in \mathbb{C} : r^2 + ar + b = 0$ s'appelle l'équation caractéristique de l'équation : $y'' + ay' + by = 0$
- Le nombre $\Delta = a^2 - 4b$ s'appelle le discriminant de l'équation caractéristique .

b. Propriété :

solution générale de l' équation différentielle $(E) : y'' + ay' + by = 0$ a et b de $\mathbb{R}$ dépend du signe de Δ .

- 1^{er} cas : $\Delta > 0$:

Donc l'équation caractéristique a deux solutions réelles sont : r_1 et r_2 . D'où la solution générale de (E) sont les fonctions de la forme : $y(x) = \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x}$; α et β de $\mathbb{R}$.

- 2^{er} cas : $\Delta = 0$

Donc l'équation caractéristique a une solution réelle est r_1 . D'où la solution générale de (E) sont les fonctions de la forme : sont les fonctions de la forme : $f(x) = (\alpha x + \beta)e^{r_1 x}$; α et β de $\mathbb{R}$.

- $3^{ième}$ cas : $\Delta < 0$:

Donc l'équation caractéristique a deux solutions complexes conjuguées sont : $r_1 = p + qi$ et $r_2 = \overline{r_1} = p - qi$. D'où la solution générale de (E) sont les fonctions de la forme :

$f(x) = (\alpha \cos(qx) + \beta \sin(qx))e^{px}$; α et β de $\mathbb{R}$.

c. Exemples :

1. Résoudre l'équation différentielle (E) : $y''-5y'+6y = 0$.

- L'équation caractéristique de (E) est : $r \in \mathbb{C} :\ r^2-5r+6 = 0$.
- On a $\Delta = a^2 - 4b = (-5)^2 - 4\times 6 = 1 > 0$ d'où l'équation caractéristique de (E) admet deux solutions réelles distinctes sont $r_1 = 2$, $r_2 = 3$.
- Ensemble des solutions de l'équation (E) sont les fonctions de la forme $f(x) = \alpha e^{2x} + \beta e^{3x}$ avec α et β de $\mathbb{R}$

2. Résoudre l'équation différentielle (E) : $y''+y'+y = 0$.

- L'équation caractéristique de (E) est : $r \in \mathbb{C} :\ r^2 + r + 1 = 0$.
- On a $\Delta = a^2 - 4b = 1^2 - 4\times 1 = -3 < 0$ d'où l'équation caractéristique de (E) admet deux solutions complexes conjuguées sont $r_2 = \overline{r_1} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \overline{j}$, $r_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = j$.
- Ensemble des solutions de l'équation (E) sont les fonctions de la forme $f(x) = f(x) = \left(\alpha \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \beta \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)e^{\frac{-1}{2}x}$ avec α et β de $\mathbb{R}$.

3. Résoudre l'équation différentielle (E) : $y'' - 4y' + 4 = 0$.

- L'équation caractéristique de (E) est : $r \in \mathbb{C} :\ r^2 - 4r + 4 = 0$. (on a $r \in \mathbb{C} :\ (r-2)^2 = 0$
- On a $\Delta = a^2 - 4b = (-4)^2 - 4\times 4 = 0$ d'où l'équation caractéristique de (E) admet une seule solution réelle est $r_1 = 2$.
- Ensemble des solutions de l'équation (E) sont les fonctions de la forme $f(x) = (\alpha x + \beta)e^{2x}$ avec α et β de $\mathbb{R}$