

Calcul intégral

I) Intégrale d'une fonction sur un segment.

Définition : Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$ et F une primitive de f sur $[a; b]$.

Le nombre $F(b) - F(a)$ est appelé intégrale de a à b de f , on le note $\int_a^b f(x)dx$.

Notation: Par commodité, le nombre $F(b) - F(a)$ s'écrit aussi $[F(x)]_a^b$. C'est-à-dire: $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

Conséquences : $\int_a^a f(x)dx = 0$ et $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

Propriété 1 : Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I , alors quel que soit l'élément a de I ,

La fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est la primitive de f sur I qui s'annule en a .

II) Propriétés de l'intégrale.

Si f et g sont deux fonctions définies et continues sur un intervalle I , et a, b et c trois réels de I . et soit $k \in \mathbb{R}$.

▪ **Linéarité de l'intégrale**: $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$ et $\int_a^b k \cdot f(x)dx = k \cdot \int_a^b f(x)dx$

▪ **Additivité ou relation de Chasles**: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

▪ **Positivité de l'intégrale**: Si $f(x) \geq 0$ sur I et si $a \leq b$, alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

▪ **Intégrale et ordre**: Si $f(x) \leq g(x)$ sur I et si $a \leq b$, alors $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

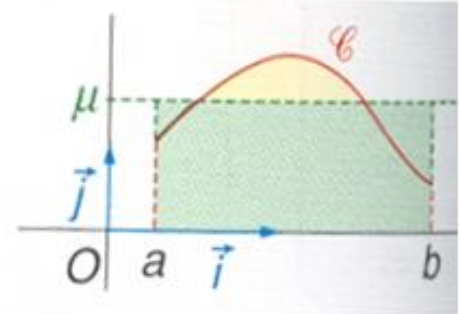
▪ **Inégalité de la moyenne**: Si $m \leq f(x) \leq M$ sur I et si $a \leq b$, alors: $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$.

▪ **Valeur moyenne d'une fonction**:

Si $a < b$ alors le nombre $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$ est appelé valeur moyenne de f sur l'intervalle $[a; b]$.

Remarques:

- La valeur moyenne de f est comprise entre m et M .
- Si le plan est rapporté à un repère orthonormé et si $f(x) \geq 0$ sur I , alors μ est la hauteur du rectangle de base $b-a$ et d'aire: $\int_a^b f(x)dx$



III) Techniques de calcul d'une intégrale.

▪ **Calcul d'une intégrale à l'aide d'une primitive.**

La connaissance des primitives de fonctions usuelles permet de calculer des intégrales. (Tableau page 14)

▪ **Intégration par parties**: Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I .

Alors $(uv)' = u'v + uv'$, donc $uv' = (uv)' - u'v$. Or une primitive de $(uv)'$ est uv ,

d'où $\int_a^b u'(x) \times v(x)dx = [u(x) \times v(x)]_a^b - \int_a^b u(x) \times v'(x)dx$ (Formule d'intégration par parties)

▪ **Décomposition de fractions en éléments simples.**

▪ **Intégrale - Parité**: Soit f une fonction continue sur un intervalle $[-a; a]$.

Si f est **paire**, alors $\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx$

Si f est **impaire**, alors $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$

▪ **Intégrale - Périodicité**: Soit f une fonction continue et périodique sur $\mathbb{R}$ de période T .

Alors, quels que soient les réels a et b on a: $\int_a^{b+T} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$ et $\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_b^{b+T} f(x)dx$

▪ **Linéarisation des fonction trigonométrique.** (Nombres complexes)

IV) Quelques applications du calcul intégral.

Aires de surfaces planes

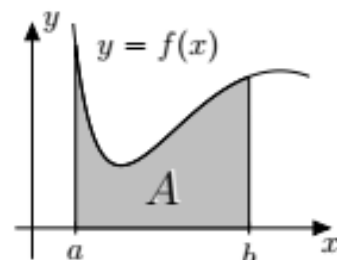
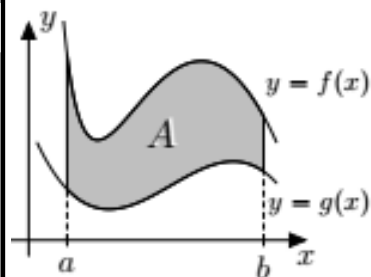
Supposons que le plan est muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a; b]$.

L'aire de la surface délimitée par (C_f) , (C_g) et les droites $(D): x = a$ et $(\Delta): x = b$

Est égale à $\int_a^b |f(x) - g(x)| dx$ (unité d'aire).

- Cas particulier: L'aire de la surface délimitée par (C_f) , l'axe des abscisses et les droites $(D): x = a$ et $(\Delta): x = b$ est $\int_a^b |f(x)| dx$ (u.a)
- unité d'aire = $\|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$



Volume d'un solide de révolution

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$.

En faisant pivoter la courbe de f autour de l'axe (Ox), on engendre un solide de révolution, dont

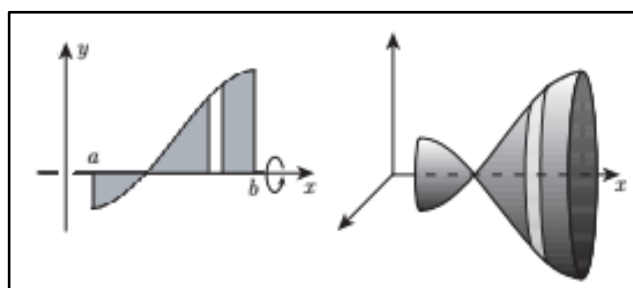
le volume est $\pi \int_a^b (f(x))^2 dx$ (unité de volume)

Remarques

- 1) f ne doit pas être nécessairement positive.
- 2) En intervertissant les rôles de x et de y , on obtient un solide de révolution engendré par une rotation autour de l'axe (Oy)

Dans ce cas, on a : $V = \pi \int_a^b (g(x))^2 dx$ (u.v)

- unité de volume = $\|\vec{i}\|^3$



- 1) Déterminer la fonction correspondante au demi-cercle de rayon r et de centre l'origine du repère.
- 2) En utilisant les intégrales, en déduire la formule de l'aire d'un disque de rayon r .
- 3) En utilisant les intégrales de révolution, en déduire la formule du volume d'une sphère de rayon r .