

## EXERCICES ET PROBLÈMES

### EXERCICE1:

Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants :

$$z_1 = i^{2020} ; \quad z_2 = (3 - \sqrt{2}i)^2 ; \quad z_3 = \frac{1+i}{\sqrt{3}i}$$

$$z_4 = \frac{(1-2i)^2 - (1-i)^3}{(1+3i)^3 + (1+i)^2} ; \quad z_5 = \frac{1}{7-4i}$$

$$z_6 = \frac{1+i}{1-i} ; \quad z_7 = \frac{1}{1-i} + \frac{1}{1+i} + \frac{i}{2}.$$

### EXERCICE2:

- 1) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation :  $z^2 - z + 1 = 0$ .
- 2) On considère dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ , les points d'affixes respectives  $A, B$  et  $C$ , tel que :  

$$z_A = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i ; z_B = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \text{ et } z_C = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$
  - Placer les points  $A, B$  et  $C$  dans le plan complexe.
- 3) On désigne par  $A'$  l'image du point  $A$  par la rotation de centre  $O$  et d'angle  $\frac{\pi}{2}$ .  
  - Placer le point  $A'$  et démontrer que le triangle  $AA'C$  est isocèle en  $A$ .
- 4) On désigne par  $B'$  l'image du point  $B$  par la rotation de centre  $O$  et d'angle  $\frac{\pi}{4}$ .  
  - Placer le point  $B'$ , et exprimer l'affixe  $z_{B'}$  en fonction  $z_B$ .
  - En déduire la forme trigonométrique et la forme algébrique de  $z_{B'}$ .
- 5) Calculer les valeurs exactes de  $\cos \frac{\pi}{12}$  et  $\sin \frac{\pi}{12}$

### EXERCICE3: (Session normale 2016)

- 1) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation :  $z^2 - 4bz + 29 = 0$
- 2) Dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ , on considère les points  $A, B$  et  $\Omega$  d'affixes respectives  $a, b$  et  $\omega$  telles que :  
 $a = 5 + 2i ; b = 5 + 8i \text{ et } \omega = 2 + 5i$ 
  - a) Considérons  $u = b - \omega$ . Vérifier que  $u = 3 + 3i$ , puis montrer que  $\arg(u) = \frac{\pi}{4} [2\pi]$ .
  - b) Déterminer un argument du nombre complexe  $\bar{u}$ .
  - c) Vérifier que:  $a - \omega = \bar{u}$ , en déduire que  

$$\Omega A = \Omega B \text{ et que } \arg\left(\frac{b - \omega}{a - \omega}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi].$$
  - d) Soit  $R$  la rotation de centre  $\Omega$  et d'angle  $\frac{\pi}{2}$ .  
Déterminer l'image du point  $A$  par la rotation  $R$ .

### EXERCICE4: (Session normale 2019)

- 1) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation :  $z^2 - 2z + 4 = 0$ .
- 2) Dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ , on considère les points  $A, B, C$  et  $D$  d'affixes respectives :  $a = 1 - i\sqrt{3}$  ;  
 $b = 2 + 2i ; c = \sqrt{3} + i \text{ et } d = -2 + 2\sqrt{3}$ 
  - a) Vérifier que :  $a - d = -\sqrt{3}(c - d)$ .
  - b) En déduire que  $A, B, C$  et  $D$  sont alignées.
- 3) On considère  $z$  l'affixe d'un point  $M$  et  $z'$  l'affixe  $M'$  l'image du point  $M$  par la rotation  $R$  de centre  $O$  et d'angle  $-\frac{\pi}{3}$ . Vérifier que  $z' = \frac{1}{2}az$
- 4) Soit  $H(h)$  l'image du point  $B$  par la rotation  $R$ , et le point  $P(p)$ , tel que  $p = a - c$ 
  - a) Vérifier que :  $h = ip$ .
  - b) Montrer que le triangle  $OHP$  est rectangle et isocèle en  $O$ .

### EXERCICE5:

Le plan est rapporté à un repère orthonormal  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  direct. On considère les points  $A, B, C$  et  $D$  d'affixes respectives  $a = 1 ; b = 3 + 4i ;$   
 $c = 2\sqrt{3} + i(-2 - \sqrt{3}) \text{ et } d = -2\sqrt{3} + i(-2 + \sqrt{3})$ .

L'objet de l'exercice est de proposer une construction géométrique des points  $D$  et  $C$ .

- 1) a. Montrer que l'image du point  $B$  par la rotation de centre  $A$  et d'angle  $\frac{2\pi}{3}$  est le point  $D$ .  
b. En déduire que les points  $B$  et  $D$  sont sur un cercle  $(C)$  de centre  $A$  dont on déterminera le rayon.
- 2) Soit  $F$ , l'image du point  $A$  par l'homothétie de centre  $B$  et de rapport  $\frac{3}{2}$ .

- a. Montrer que l'affixe  $z_F$  du point  $F$  est  $-2i$ .
- b. Montrer que le point  $F$  est le milieu de  $[CD]$ .
- c. Montrer que  $\frac{c - z_F}{a - z_F} = -i\sqrt{3}$ . En déduire la forme exponentielle de  $\frac{c - z_F}{a - z_F}$ . Déduire des questions précédentes que la droite  $(AF)$  est la médiatrice du segment  $[CD]$ .

### EXERCICE6:

Le plan est rapporté au repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ . Déterminer l'ensemble des points  $M(z)$  tels que:

- 1)  $|z - 1 + 2i| = 4$
- 2)  $|z - 2 + i| = |\bar{z} + 2 - 2i|$
- 3)  $|iz - 2 + i| = 6$
- 4)  $|\bar{z} - 1 + 2i| = |z - 3 - i|$
- 5)  $z\bar{z} + i(z - \bar{z}) = -1$
- 6)  $\arg(z) = \frac{\pi}{4} [\pi]$

**EXERCICE7:**

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ . Soient  $A, B$  et  $C$  les points d'affixes respectives  $a = 2i$ ;  $b = -\sqrt{3} + i$  et  $c = -\sqrt{3} - i$ .

1) Placer les points  $A, B$  et  $C$  sur une figure.

2) Soit  $Z = \frac{a-b}{c-b}$ .

a. Interpréter géométriquement  $|Z|$  et  $\arg(Z)$ .

b. Écrire  $Z$  sous la forme algébrique et sous la forme trigonométrique.

c. En déduire la nature du triangle  $ABC$ .

d. Déterminer  $(\overline{BC}, \overline{BA})$ .

**EXERCICE8:**

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ , et  $f$  la transformation du plan qui à  $M$  d'affixe  $z$  associe  $M'$  d'affixe  $z'$  tel que :  $z' = 4z + 6 - 3i$ .

Déterminer l'unique point invariant de  $f$  et en déduire la nature et les éléments caractéristique de  $f$ .

**EXERCICE9:**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ . On considère les points  $A, B$  et  $C$  d'affixes respectives :  $a = 2$ ,  $b = 1 + i\sqrt{3}$  et  $c = 1 - i\sqrt{3}$ .

1) a. Placer les points  $A, B$  et  $C$  dans le plan complexe.

b. Démontrer que les points  $A, B$  et  $C$  sont sur un même cercle  $(\Gamma)$  de centre  $O$ .

c. Construire le cercle  $(\Gamma)$ .

2) Déterminer un argument du nombre complexe  $b$ , et

on déduire  $(\overline{OA}, \overline{OB})$ . Quelle est la nature du triangle  $OAB$  ?

**EXERCICE10:**

Soit  $m$  un nombre complexe de module 2,  $a$  et  $b$  deux nombres complexes tel que :

$$a = 1 + i + m \quad \text{et} \quad b = 1 - i + m$$

1) Déterminer  $m$  pour que  $a$  et  $b$  soient conjugués.

2) Déterminer  $m$  pour que  $a$  et  $b$  soient de même module

3) Déterminer  $m$  pour que  $a + ib = 0$ .

**EXERCICE11:**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

1) a- Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $z^2 - 4z + 8 = 0$ .

b- Ecrire les solutions sous la forme algébrique et trigonométrique.

2) On considère les points  $A$  et  $B$  d'affixes respectives  $2 - 2i$  et  $2 + 2i$ .

a- Placer dans le plan les points  $A$  et  $B$ .

b- Quelle est la nature du triangle  $OAB$  ?

3) Soit le point  $C$  d'affixe :  $z_C = (2 - 2i) \cdot e^{i\frac{\pi}{3}}$ .

a- Ecrire  $z_C$  sous la forme algébrique et sous la forme trigonométrique.

b- En déduire les valeurs de  $\cos \frac{\pi}{12}$  et  $\sin \frac{\pi}{12}$ .

4) a- Comparer  $OA$  et  $OC$  et donner une mesure de l'angle  $(\overline{OA}, \overline{OC})$ .

b- quelle est la nature exacte du triangle  $OAC$ .

**EXERCICE12: (Session normale 2015)**

1) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation :  $z^2 + 10z + 26 = 0$

2) Dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ , on considère les points  $A, B, C$  et  $\Omega$  d'affixes respectives :  $a = -2 + 2i$ ;

$$b = -5 + i; \quad c = -5 - i \quad \text{et} \quad \omega = -3$$

a) Vérifier que :  $\frac{b - \omega}{a - \omega} = i$ .

b) En déduire la nature du triangle  $\Omega AB$ .

3) Soit  $D$  l'image du point  $C$  par la translation  $T$  de vecteur  $\vec{u}$  d'affixe  $6 + 4i$ .

a) Montrer que l'affixe de  $D$  est  $d = 1 + 3i$

b) Montrer que  $\frac{b - d}{a - d} = 2$ , en déduire que  $A$  est le milieu  $[BD]$ .

**EXERCICE13:**

1) Linéarisez  $\cos^4 x$  et  $\cos^4 x \times \sin^2 x$ .

2) Calculer les deux intégrales  $I$  et  $J$  suivants :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x \, dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^4 x \times \sin^2 x) \, dx$$

**EXERCICE14:**

Soit  $z = e^{i\theta}$  avec  $\theta \in ]0, \pi[$ , on pose  $Z = \frac{iz(z-1)}{z+1}$ .

1) Ecrire sous forme exponentielle chacun des nombres complexes :  $z + 1$ ;  $z - 1$  et  $Z$

2) Déterminer la partie réelle  $x$  de  $Z$  et la partie imaginaire  $y$  de  $Z$ .

**EXERCICE15:**

Le plan est rapporté au repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$

$$\text{Posons :} \quad Z = \frac{z - (4 + 2i)}{z + 2i}$$

a) Déterminer la forme cartésienne de  $z'$ .

b) Déterminer l'ensemble des points  $M(z)$  tels que  $Z$  soit réel.

c) Déterminer l'ensemble des points  $M(z)$  tels que  $Z$  soit imaginaire pur.

d) Déterminer l'ensemble des points  $M(z)$  tels que  $|Z| = 1$