

EXERCICES ET PROBLÈMES

EXERCICE1:

Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants :

$$z_1 = i^{2020} \quad ; \quad z_2 = (3 - \sqrt{2}i)^2 \quad ; \quad z_3 = \frac{1+i}{\sqrt{3}i}$$

$$z_4 = \frac{(1-2i)^2 - (1-i)^3}{(1+3i)^3 + (1+i)^2} \quad ; \quad z_5 = \frac{1}{7-4i}$$

$$z_6 = \frac{1+i}{1-i} \quad ; \quad z_7 = \frac{1}{1-i} + \frac{1}{1+i} + \frac{i}{2}.$$

EXERCICE2:

- 1) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation : $z^2 - z + 1 = 0$.
- 2) On considère dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) , les points d'affixes respectives A, B et C , tel que :

$$z_A = \frac{1+\sqrt{3}}{2}i ; z_B = \frac{1-\sqrt{3}}{2}i \text{ et } z_C = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

- Placer les points A, B et C dans le plan complexe.
- 3) On désigne par A' l'image du point A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
- Placer le point A' et démontrer que le triangle $AA'C$ est isocèle en A .
- 4) On désigne par B' l'image du point B par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$.
- Placer le point B' , et exprimer l'affixe $z_{B'}$ en fonction z_B .
- En déduire la forme trigonométrique et la forme algébrique de $z_{B'}$.
- 5) Calculer les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$

EXERCICE3: (Session normale 2016)

- 1) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation : $z^2 - 4bz + 29 = 0$
- 2) Dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , on considère les points A, B et Ω d'affixes respectives a, b et ω telles que : $a = 5+2i ; b = 5+8i$ et $\omega = 2+5i$
- a) Considérons $u = b - \omega$. Vérifier que $u = 3+3i$, puis montrer que $\arg(u) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$.
- b) Déterminer un argument du nombre complexe \bar{u} .
- c) Vérifier que : $a - \omega = \bar{u}$, en déduire que $\Omega A = \Omega B$ et que $\arg\left(\frac{b-\omega}{a-\omega}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.
- d) Soit R la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Déterminer l'image du point A par la rotation R .

EXERCICE4: (Session normale 2019)

- 1) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation : $z^2 - 2z + 4 = 0$.
- 2) Dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives : $a = 1 - i\sqrt{3}$; $b = 2 + 2i$; $c = \sqrt{3} + i$ et $d = -2 + 2\sqrt{3}$
- a) Vérifier que : $a - d = -\sqrt{3}(c - d)$.
- b) En déduire que A, B, C et D sont alignées.
- 3) On considère z l'affixe d'un point M et z' l'affixe M' l'image du point M par la rotation R de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{3}$. Vérifier que $z' = \frac{1}{2}az$
- 4) Soit $H(h)$ l'image du point B par la rotation R , et le point $P(p)$, tel que $p = a - c$
- a) Vérifier que : $h = ip$.
- b) Montrer que le triangle OHP est rectangle et isocèle en O .

EXERCICES5:

Le plan est rapporté à un repère orthonormal (O, \vec{u}, \vec{v}) direct. On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $a = 1 ; b = 3 + 4i ; c = 2\sqrt{3} + i(-2 - \sqrt{3})$ et $d = -2\sqrt{3} + i(-2 + \sqrt{3})$.

L'objet de l'exercice est de proposer une construction géométrique des points D et C .

- 1) a. Montrer que l'image du point B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ est le point D .

- b. En déduire que les points B et D sont sur un cercle (C) de centre A dont on déterminera le rayon.

- 2) Soit F , l'image du point A par l'homothétie de centre B et de rapport $\frac{3}{2}$.

- a. Montrer que l'affixe z_F du point F est $-2i$.

- b. Montrer que le point F est le milieu de $[CD]$.

- c. Montrer que $\frac{c-z_F}{a-z_F} = -i\sqrt{3}$. En déduire la forme exponentielle de $\frac{c-z_F}{a-z_F}$. Déduire des questions précédentes que la droite (AF) est la médiatrice du segment $[CD]$.

EXERCICE6:

Le plan est rapporter au repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) . Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que :

- 1) $|z - 1 + 2i| = 4$
- 2) $|z - 2 + i| = |\bar{z} + 2 - 2i|$
- 3) $|iz - 2 + i| = 6$
- 4) $|\bar{z} - 1 + 2i| = |z - 3 - i|$
- 5) $z\bar{z} + i(z - \bar{z}) = -1$
- 6) $\arg(z) = \frac{\pi}{4}[\pi]$

EXERCICE7:

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) . Soient A, B et C les points d'affixes respectives $a = 2i$; $b = -\sqrt{3} + i$ et $c = -\sqrt{3} - i$.

1) Placer les points A, B et C sur une figure.

2) Soit $Z = \frac{a-b}{c-b}$.

a. Interpréter géométriquement $|Z|$ et $\arg(Z)$.

b. Écrire Z sous la forme algébrique et sous la forme trigonométrique.

c. En déduire la nature du triangle ABC .

d. Déterminer $(\overline{BC}, \overline{BA})$.

EXERCICE8:

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , et f la transformation du plan qui à M d'affixe z associe M' d'affixe z' tel que : $z' = 4z + 6 - 3i$.

Déterminer l'unique point invariant de f et en déduire la nature et les éléments caractéristique de f .

EXERCICE9:

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal (O, \vec{u}, \vec{v}) . On considère les points A, B et C d'affixes respectives : $a = 2$, $b = 1+i\sqrt{3}$ et $c = 1-i\sqrt{3}$.

1) a. Placer les points A, B et C dans le plan complexe.

b. Démontrer que les points A, B et C sont sur un même cercle (Γ) de centre O .

c. Construire le cercle (Γ) .

2) Déterminer un argument du nombre complexe b , et on déduire $(\overline{OA}, \overline{OB})$. Quelle est la nature du triangle OAB ?

EXERCICE10:

Soit m un nombre complexe de module 2, a et b deux nombres complexes tel que :

$$a = 1+i+m \quad \text{et} \quad b = 1-i+m$$

1) Déterminer m pour que a et b soient conjugués.

2) Déterminer m pour que a et b soient de même module

3) Déterminer m pour que $a+ib=0$.

EXERCICE11:

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .

1) a- Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $z^2 - 4z + 8 = 0$.

b- Ecrire les solutions sous la forme algébrique et trigonométrique.

2) On considère les points A et B d'affixes respectives $2-2i$ et $2+2i$.

a- Placer dans le plan les points A et B .

b- Quelle est la nature du triangle OAB ?

3) Soit le point C d'affixe : $z_C = (2-2i) \cdot e^{i\frac{\pi}{3}}$.

a- Ecrire z_C sous la forme algébrique et sous la forme trigonométrique.

b- En déduire les valeurs de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

4) a- Comparer OA et OC et donner une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC})$.

b- quelle est la nature exacte du triangle OAC .

EXERCICE12: (Session normale 2015)

1) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation : $z^2 + 10z + 26 = 0$

2) Dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , on considère les points A, B, C et Ω d'affixes respectives : $a = -2+2i$; $b = -5+i$; $c = -5-i$ et $\omega = -3$

a) Vérifier que : $\frac{b-\omega}{a-\omega} = i$.

b) En déduire la nature du triangle ΩAB .

3) Soit D l'image du point C par la translation T de vecteur \vec{u} d'affixe $6+4i$.

a) Montrer que l'affixe de D est $d = 1+3i$

b) Montrer que $\frac{b-d}{a-d} = 2$, en déduire que A est le milieu $[BD]$.

EXERCICE13:

1) Linéarisez $\cos^4 x$ et $\cos^4 x \times \sin^2 x$.

2) Calculer les deux intégrales I et J suivants :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x \, dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^4 x \times \sin^2 x) \, dx$$

EXERCICE14:

Soit $z = e^{i\theta}$ avec $\theta \in]0, \pi[$, on pose $Z = \frac{iz(z-1)}{z+1}$.

1) Ecrire sous forme exponentielle chacun des nombres complexes : $z+1$; $z-1$ et Z

2) Déterminer la partie réelle x de Z et la partie imaginaire y de Z .

EXERCICE15:

Le plan est rapporter au repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v})

Posons : $Z = \frac{z-(4+2i)}{z+2i}$

a) Déterminer la forme cartésienne de z' .

b) Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que Z soit réel.

c) Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que Z soit imaginaire pur.

d) Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que $|Z|=1$