



## IX. Notation exponentielle ou écriture exponentielle d'un nombre complexe non nul :

### a. Définition :

- L'écriture trigonométrique de  $z = [r, \alpha] = [|z|, \arg z]$  sera notée de la manière suivante  
 $z = [r, \alpha] = r(\cos \alpha + i \sin \alpha) = re^{i\alpha}$
- $z = re^{i\alpha}$  s'appelle l'écriture exponentielle ou la forme exponentielle de  $z$  non nul
- propriétés :  $(e^{i\alpha})^n = e^{in\alpha}$  ;  $\frac{e^{i\alpha}}{e^{i\beta}} = e^{i(\alpha-\beta)}$  ;  $\frac{1}{e^{i\beta}} = e^{-i\beta}$  ;  $e^{i\alpha} \times e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)}$  avec  $\alpha$  et  $\beta$  de  $\mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{Z}$ .

### b. Formules d'EULER :

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$  on pose on a :  $z = [1, \alpha] = \cos \alpha + i \sin \alpha$  est un nombre complexe de module 1 et d'argument  $\alpha$ . Donc  $z = \cos \alpha + i \sin \alpha = e^{i\alpha}$  d'où :

$$\left. \begin{aligned} z = \cos \alpha + i \sin \alpha = e^{i\alpha} \\ \bar{z} = \cos \alpha - i \sin \alpha = e^{-i\alpha} \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \begin{cases} z + \bar{z} = 2 \cos \alpha = e^{i\alpha} + e^{-i\alpha} \\ z - \bar{z} = 2i \sin \alpha = e^{i\alpha} - e^{-i\alpha} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos \alpha = \frac{z + \bar{z}}{2} = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2} \\ \sin \alpha = \frac{z - \bar{z}}{2i} = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i} \end{cases}$$

formules d'EULER

$$\left\{ \begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{z + \bar{z}}{2} = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2} \\ \sin \alpha &= \frac{z - \bar{z}}{2i} = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i} \end{aligned} \right.$$

Remarque : avec  $z = \cos \alpha + i \sin \alpha = e^{i\alpha}$

D'après formule de Moivre on a :

$$z^n = [1, \alpha]^n = (e^{i\alpha})^n = e^{in\alpha} = \cos n\alpha + i \sin n\alpha$$

$$(\bar{z})^n = [1, -\alpha]^n = (e^{-i\alpha})^n = e^{-in\alpha} = \cos n\alpha - i \sin n\alpha$$

D'où :

$$\bullet e^{in\alpha} + e^{-in\alpha} = z^n + (\bar{z})^n = 2 \cos n\alpha$$

$$\bullet e^{in\alpha} - e^{-in\alpha} = z^n - (\bar{z})^n = 2i \sin n\alpha .$$

$$\bullet e^{in\alpha} \times e^{-in\alpha} = z^n \times (\bar{z})^n = 1$$



## Formules d'EULER

Leonhard EULER  
(Bâle 1707, Saint-Petersbourg 1783)



La notation  $i$  fut introduite par Euler, le grand mathématicien suisse. Dans ce livre, on notera j à la place de  $i$ , notation utilisée pour l'intensité en électricité.

## Données clés

|              |  |
|--------------|--|
| Naissance    | <a href="#">15 avril 1707</a><br><a href="#">Bâle (Suisse)</a>                             |
| Décès        | <a href="#">18 septembre 1783</a> (à 76 ans)<br><a href="#">Saint-Petersbourg (Russie)</a> |
| Nationalité  | <a href="#">Suisse</a>   |
| Champs       | <a href="#">Mathématiques</a> et <a href="#">physique</a>                                  |
| Institutions | <a href="#">Académie des sciences de Russie</a><br><a href="#">Académie de Berlin</a>      |
| Renommé pour | <a href="#">Liste complète</a>   |

Signature

c. Application linéarisation :

- On linéarise  $\cos^3 x$ .

D'après formules d'EULER :  $\cos \alpha = \frac{z + \bar{z}}{2} = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}$  d'où :

$$\begin{aligned} \cos^3 x &= \left( \frac{z + \bar{z}}{2} \right)^3 = \frac{1}{2^3} (z + \bar{z})^3 = \frac{1}{8} (z^3 + 3z^2\bar{z} + 3z(\bar{z})^2 + (\bar{z})^3) = \frac{1}{8} (z^3 + (\bar{z})^3 + 3z\bar{z} \times (z + \bar{z})) \\ &= \frac{1}{8} (2\cos 3x + 3 \times 1 \times 2\cos x) = \frac{1}{4} \cos 3x + \frac{3}{4} \cos x. \end{aligned}$$

Conclusion :  $\cos^3 x = 2\cos 3x + 6\cos x$ .

X. Equation du deuxième degré :

01. Equation de la forme  $z \in \mathbb{C} : z^2 = a$  avec  $a \in \mathbb{R}$  :

a. Activité :

1. Résoudre les équations suivantes :

- $z \in \mathbb{C} / z^2 = 0$ .
- $z \in \mathbb{C} / z^2 = 2$ .
- $z \in \mathbb{C} / z^2 = -2$ .

2. Donner la propriété :

b. Propriété :

Soit  $a$  est un réel, ensemble des solutions de l'équation :  $z \in \mathbb{C} : z^2 = a$  est :

- Si  $a = 0$  alors  $S = \{0\}$ .
- Si  $a > 0$  alors  $S = \{\sqrt{a}, -\sqrt{a}\}$ .
- Si  $a < 0$  alors  $S = \{i\sqrt{-a}, -i\sqrt{-a}\}$ .

02. Equation du 2<sup>ème</sup> degré de la forme  $z \in \mathbb{C} / az^2 + bz + c = 0$  ;  $a \in \mathbb{R}^*$   $b \in \mathbb{R}$  et  $c \in \mathbb{R}$  :

a. Activité :

On considère l'équation suivante : (F) :  $z \in \mathbb{C} / az^2 + bz + c = 0$ .



On a :  $az^2 + bz + c = a \left[ \left( z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right] = a \left[ \left( z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$

d'où :  $az^2 + bz + c = 0 \Leftrightarrow a \left[ \left( z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right] = 0$

$$\Leftrightarrow \left( z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0 \quad ; (a \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow \left( z + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} \quad ; (1)$$

• 1<sup>er</sup> cas  $\Delta = 0$  : (1)  $\Leftrightarrow \left( z + \frac{b}{2a} \right)^2 = 0 \Leftrightarrow z = -\frac{b}{2a}$  donc l'équation a une solution double  $z = -\frac{b}{2a}$

• 2<sup>ème</sup> cas  $\Delta > 0$  : On a :  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$  donc l'équation à deux solutions réelles :  $z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$  ;  $z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

• 3<sup>ème</sup> cas  $\Delta < 0$  :

Donc  $-\Delta > 0$  par suite :  $\Delta = -1 \times (-\Delta) = i^2 (\sqrt{-\Delta})^2 = (i\sqrt{-\Delta})^2$

D'où : (1)  $\Leftrightarrow \left( z + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{(i\sqrt{-\Delta})^2}{4a^2}$

$$\Leftrightarrow \left( z + \frac{b}{2a} \right)^2 = \left( \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a} \right)^2$$

$$\Leftrightarrow z + \frac{b}{2a} = \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ ou } z + \frac{b}{2a} = -\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

$$\Leftrightarrow z = -\frac{b}{2a} + \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ ou } z = -\frac{b}{2a} - \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ ou } z = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

**Conclusion** : l'équation a deux solutions complexes conjuguées :  $z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$  ;  $z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

### b. Théorème :

Equation du 2<sup>ème</sup> degré de la forme  $z \in \mathbb{C} / az^2 + bz + c = 0$  ;  $a \in \mathbb{R}^*$   $b \in \mathbb{R}$  et  $c \in \mathbb{R}$  et  $\Delta = b^2 - 4ac$  a pour solutions :

• 1<sup>er</sup> cas  $\Delta = 0$  : l'équation a une solution double  $z = -\frac{b}{2a}$

• 2<sup>ème</sup> cas  $\Delta > 0$  : l'équation à deux solutions réelles :  $z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$  ;  $z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

• 3<sup>ème</sup> cas  $\Delta < 0$  : l'équation a deux solutions complexes conjuguées :  $z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$  ;  $z_2 = \overline{z_1} = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

**c. Remarque :**

- $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$  et  $z_1 \times z_2 = \frac{c}{a}$ .
- $\Delta \neq 0$  alors  $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$ .
- $\Delta = 0$  alors  $az^2 + bz + c = a(z - z_1)^2$ .

**d. Application :**

On considère l'équation suivante : (E) :  $z \in \mathbb{C} / z^2 + z + 1 = 0$ .

1. Calculons  $\Delta$  le discriminant de l'équation.

On a  $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0$

2. On déduit les solutions de l'équation :

Puis que  $\Delta < 0$  : l'équation a deux solutions complexes conjuguées sont :

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} ; z_2 = \overline{z_1} = \frac{-1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

**XL. L'écriture complexe des transformations suivantes : translation – homothétie – rotation.****01. Vocabulaire :**

Le plan complexe (P) est muni d'un repère orthonormé direct  $(0, \vec{u}, \vec{v})$ .

• On considère la relation suivante : cette relation à tout point  $M_{(z)}$  de (P) d'affixe  $z$  on associe le point

$M'_{(z')}$  de (P) d'affixe  $z'$ .

• Cette relation est notée  $f$  ou  $g$  et appelée transformation dans le plan (P).

$$f : (P) \rightarrow (P)$$

• Cette transformation est représentée de la manière suivante :

$$M_{(z)} \mapsto f(M_{(z)}) = M'_{(z')}$$

• L'écriture :  $z' = f(z)$  est appelée l'écriture complexe du transformation  $f$

**02. L'écriture complexe de certains transformation  $f$  :****A. L'écriture complexe d'une translation  $f = t_{\vec{u}}$  :****a. Rappel :**

Translation :  $f = t_{\vec{u}}$  est définie par pour tout point  $M$  de (P) on a :  $f(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u}$

**b. Remarque :**

$$\overrightarrow{MM'} = \vec{u} \Leftrightarrow Z_{\overrightarrow{MM'}} = Z_{\vec{u}} \Leftrightarrow z' - z = u \text{ avec } M_{(z)} \text{ et } M'_{(z')} \text{ et } \vec{u}_{(b)}.$$

**c. Propriété :**

• L'écriture complexe du translation  $f = t_{\vec{u}}$  de vecteur  $\vec{u}$  d'affixe le complexe  $b$  est  $z' - z = b$  ou bien  $z' = z + b$ .

• Toute transformation  $f$  dans le plan complexe qui transforme  $M_{(z)}$  au point  $M'_{(z')}$  tel que :  $z' = z + b$  est une translation de vecteur  $\vec{u}$  d'affixe le complexe  $b$  :



**d. Application :**

- On considère la transformation  $f$  qui associe tout point  $M_{(z)}$  de  $(P)$  d'affixe  $z$  on associe le point  $M'_{(z')}$  de  $(P)$  d'affixe  $z'$  tel que :  $z' = z + 2 - 3i$ .

1. on détermine la nature de cette transformation  $f$  :

on remarque que l'écriture complexe du translation  $f = t_{\vec{u}}$  est de la forme  $z' = z + b$  d'où  $f$  est

une translation du vecteur  $\vec{u}$  d'affixe  $b = 2 - 3i$   $\left( \vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right)$ .

**B. L'écriture complexe d'une homothétie  $f = h(\Omega, k)$  :**

**e. Rappel :**

Homothétie :  $f = h(\Omega, k)$   $\Omega$  est le centre de l'homothétie et  $k$  le rapport de l'homothétie

Homothétie :  $f = h(\Omega, k)$  est définie par pour tout point  $M$  de  $(P)$  on a :  $f(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = k \overrightarrow{\Omega M}$

**f. Remarque :**

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\Omega M'} = k \overrightarrow{\Omega M} &\Leftrightarrow Z_{\overrightarrow{\Omega M'}} = Z_{k \overrightarrow{\Omega M}} \\ &\Leftrightarrow z' - \omega = k(z - \omega) \end{aligned}$$

avec  $M_{(z)}$  et  $M'_{(z')}$  et  $\Omega_{(\omega)}$ .

**g. Propriété :**

• L'écriture complexe de l'homothétie  $f = h(\Omega, k)$  de centre le point  $\Omega$  et de rapport  $k$  non et différent de 1 ( $k \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ ) est  $z' - \omega = k(z - \omega)$  ou bien  $z' = kz + b$  avec ( $b = \omega - k\omega \in \mathbb{C}$ ).

• Toute transformation  $f$  dans le plan complexe qui transforme  $M_{(z)}$  au point  $M'_{(z')}$  tel que :  $z' = kz + b$  est une homothétie :

- de centre le point  $\Omega_{(\omega)}$ ,  $\Omega$  est un point invariant par  $f$  c.à.d.  $f(\Omega) = \Omega$  ou  $\omega = k\omega + b$  d'où  $\omega = \frac{b}{1-k}$
- De rapport  $k \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ .

**h. Application :**

- On considère la transformation  $f$  qui associe tout point  $M_{(z)}$  de  $(P)$  d'affixe  $z$  on associe le point  $M'_{(z')}$  de  $(P)$  d'affixe  $z'$  tel que :  $z' = 2z + 1 + i$ .

1. on détermine la nature de cette transformation  $f$  :

on remarque que l'écriture complexe de la transformation  $f$  est de la forme  $z' = kz + b$  d'où  $f$  est une homothétie de rapport  $k = 2$  et de centre le point  $\Omega_{(\omega)}$   $\Omega$  est un point invariant par  $f$  c.à.d.

$$\omega = 2\omega + 1 + i \text{ d'où : } \omega = \frac{1+i}{1-2} = -1-i.$$

**Conclusion :** la transformation  $f$  est une homothétie de rapport  $k = 2$  et de centre le point  $\Omega$  d'affixe  $\omega = -1-i$  ou bien  $f = h(\Omega_{(\omega=-1-i)}, 2)$  (le centre est le point de coordonnées  $(-1, -1)$ )



### C. L'écriture complexe d'une rotation $f = r(\Omega, \theta)$ :

#### i. Rappel :

Rotation :  $f = r(\Omega, \theta)$   $\Omega$  est le centre de la rotation  $r$  et  $\theta$  est l'angle de la rotation  $r$  ( $\theta$  est mesure)

La rotation :  $f = r(\Omega, \theta)$  est définie par pour tout point  $M \neq \Omega$  de  $(P)$  on a :

$$f(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ \left( \overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'} \right) \equiv \alpha \pmod{2\pi} \end{cases} \text{ et pour } \Omega \text{ on a : } f(\Omega) = \Omega \quad (\Omega \text{ est un point invariant})$$

#### j. Remarque :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\Omega M'} = k \overrightarrow{\Omega M} &\Leftrightarrow Z_{\overrightarrow{\Omega M'}} = Z_{k \overrightarrow{\Omega M}} \\ &\Leftrightarrow z' - \omega = k(z - \omega) \end{aligned} \text{ avec } M_{(z)} \text{ et } M'_{(z')} \text{ et } \Omega_{(\omega)}.$$

#### k. Propriété :

• L'écriture complexe de la rotation  $f = r(\Omega, \theta)$  de centre le point  $\Omega$  et d'angle  $\theta$  est  $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$  ou bien  $z' = ze^{i\theta} + b$  avec  $(b = \omega - \omega e^{i\theta} \in \mathbb{C})$ .

• Toute transformation  $f$  dans le plan complexe qui transforme  $M_{(z)}$  au point  $M'_{(z')}$  tel que :  $z' = az + b$

avec  $a \neq 1$  et  $|a| = 1$  (ou  $z' = ze^{i\theta} + b$ ) est une rotation :

❖ de centre le point  $\Omega_{(\omega)}$   $\Omega$  est un point invariant par  $f$  c.à.d.  $\omega = a\omega + b$  (ou  $\omega = e^{i\theta}\omega + b$ ) d'où :

$$\omega = \frac{b}{1-a} \text{ ou } \omega = \frac{b}{1-e^{i\theta}}.$$

❖ D'angle  $\arg(a) \pmod{2\pi}$  (ou  $\theta \equiv \arg(e^{i\theta}) \pmod{2\pi}$ ) ou encore  $\theta \equiv \arg\left(\frac{z' - \omega}{z - \omega}\right) \pmod{2\pi}$ .

#### l. Application :

• On considère la transformation  $f$  qui associe tout point  $M_{(z)}$  de  $(P)$  d'affixe  $z$  on associe le point  $M'_{(z')}$

de  $(P)$  d'affixe  $z'$  tel que :  $z' = -iz + 1 - i$

2. on détermine la nature de cette transformation  $f$  :

$$\text{on a : } z' = -iz + 1 - i = e^{i\pi}z + (1 - i)$$

on remarque que l'écriture complexe de la transformation  $f$  est de la forme  $z' = ze^{i\theta} + b$  d'où  $f$  est une rotation :

• de centre  $\omega = \frac{b}{1-a} = \frac{1-i}{1+i} = -i$  d'où le centre est le point  $\Omega_{(\omega=-i)}$ .

• d'angle :  $\arg(e^{i\theta}) \equiv \arg(-i) \equiv -\frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$ .

• **Conclusion** : la transformation  $f$  est une rotation  $r\left(\Omega_{(\omega=-i)}, -\frac{\pi}{2}\right)$  de centre est le point de coordonnées  $(0, 1)$ .



**c. Exercice :**

Parmi les écritures complexes des transformations suivantes indiqué la nature et les éléments caractéristiques de chaque transformation .

1.  $z' = -4z - 2 + 5i$  .

2.  $z' = \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) z - 4 + 2i$  .

**Correction :**

1. Pour :  $z' = -4z - 2 + 5i$

l'écriture complexe une homothétie  $f$  est de la forme  $z' = kz + b$  avec  $k = -4 \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$  d'où  $f$  est une homothétie de rapport  $k = -4$  et de centre le point  $\Omega_{(\omega)}$   $\Omega$  est un point invariant par  $f$  c.à.d.

$\Omega = \Omega'$  donc  $\omega' = \omega$  d'où :  $\omega = -3\omega - 8 + 12i$  d'où :  $\omega = \frac{-8 + 12i}{4} = -2 + 3i$  ( on peut utiliser la

relation suivante  $\omega = \frac{b}{1-k} = \frac{-8 + 12i}{1+3} = -2 + 3i$  ) .

**Conclusion :** la transformation  $f$  est une homothétie de rapport  $k = -4$  et de centre le point  $\Omega$  d'affixe  $\omega = -2 + 3i$  ou bien  $f = h(\Omega_{(\omega=-2+3i)}, -4)$  ( le centre est le point de coordonnées  $(-2, 3)$  )

2. Pour  $z' = \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) z - 4 + 2i$  .

On a :  $z' = \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) z - 4 + 2i = \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) z - 4 + 2i = e^{i\frac{\pi}{6}} z - 4 + 2i$  .

D'où l'écriture complexe est de la forme :  $z' = ze^{i\theta} + b$  .

**Conclusion :** la transformation  $f$  est une rotation de centre le point  $\Omega$  d'affixe

$\omega = -4 - \sqrt{3} - (3 + 2\sqrt{3})i$  et d'angle  $\frac{\pi}{6}$  ou bien  $f = h(\Omega_{(\omega=-4-\sqrt{3}-(3+2\sqrt{3})i)}, \frac{\pi}{6})$  ( le centre est le point de coordonnées  $(-4-\sqrt{3}, -(3+2\sqrt{3}))$  )

**d. Résumé pour les transformations précédentes :**

| Rappel<br>Transformation est :   | Ecriture complexe  | Transformation donnée de la forme $f$ transforme le point $M_{(z')}$ au point $M'_{(z')}$ avec $z' = az + b$ ; $(a, b \in \mathbb{C})$<br>Le programme se limite à trois cas les valeurs de $a$                            |
|--|--|--|
| Translation : $f = t_{\vec{u}}$<br>$f(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u}$  | $z' - z = b$<br>ou bien<br>$z' = z + b$  | 1 <sup>er</sup> cas $a = 1$ on a : $z' = z + b$<br>Nature de la transformation : $f$ est une <b>Translation</b><br>Eléments caractéristiques :<br>• $b$ est l'affixe du vecteur $\vec{u}$ de la translation $f$ .          |
| Homothétie : $f = h(\Omega, k)$<br>$\Omega$ centre de l'homothétie<br>$k$ rapport de l'homothétie<br><b>définition :</b><br>$f(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = k \overrightarrow{\Omega M}$ | $z' - \omega = k(z - \omega)$<br>ou bien<br>$z' = kz + b$<br>( $b = \omega - k\omega \in \mathbb{C}$ ) | 2 <sup>ième</sup> cas $a = k \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$ on a : $z' = kz + b$<br>Nature de la transformation $f$ : $f$ est une <b>Homothétie</b><br>Eléments caractéristiques :<br>• $k$ rapport de l'homothétie $f$ |





|  |  |  |
|--|--|--|
|  |  | <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>\omega = \frac{b}{1-k} = \frac{b}{1-a}</math> est l'affixe du centre <math>\Omega</math> de l'homothétie <math>f</math></li> <li>• Remarque : <math>\Omega</math> est invariant par <math>f</math> donc <math>f(\Omega) = \Omega</math></li> </ul> <p>D'où : <math>z' = kz + b \Leftrightarrow \omega = k\omega + b</math> donc <math>\omega = \frac{b}{1-k}</math></p>   |
| <p>Rotation : <math>f = r(\Omega, \alpha)</math></p> <p><math>\Omega</math> centre de l'homothétie</p> <p><math>\alpha</math> angle de rotation</p> <p>définition :</p> <p><math>f(M) = M' \Leftrightarrow</math></p> $\begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ \left( \overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'} \right) \equiv \alpha \pmod{2\pi} \end{cases}$ | <p><math>z' - \omega = (z - \omega)e^{i\alpha}</math></p> <p>ou bien</p> <p><math>z' = e^{i\alpha}z + b</math></p> <p><math>(b = \omega - \omega e^{i\alpha})</math></p> | <p>3<sup>ème</sup> cas <math> a  = 1</math> on a : <math>z' = e^{i\alpha}z + b</math></p> <p>ou <math>z' = az + b = (\cos \alpha + i \sin \alpha)z + b</math></p> <p>ou <math>z' = (x + yi)z + b</math> ; (avec <math> x + yi  = 1</math>)</p> <p>Nature de la transformation <math>f</math> : <math>f</math> est une <b>Rotation</b></p> <p>Eléments caractéristiques :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>\alpha</math> ou <math>\arg(x + yi)</math> est l'angle de la rotation .</li> <li>• Ou</li> </ul> $\omega = \frac{b}{1-a} = \frac{b}{1-e^{i\theta}} = \frac{b}{1-(\cos \alpha + i \sin \alpha)} = \frac{b}{1-(x + yi)}$ <p><math>\omega = \frac{b}{1-a} = \frac{b}{1-e^{i\theta}}</math> est l'affixe du centre <math>\Omega</math> de la rotation <math>f</math></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Remarque :</li> </ul> <ul style="list-style-type: none"> <li>❖ <math>\Omega</math> est invariant par <math>f</math> donc <math>f(\Omega) = \Omega</math></li> </ul> <p>D'où : <math>z' = az + b \Leftrightarrow \omega = k\omega + b</math> donc <math>\omega = \frac{b}{1-a}</math>.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>❖ De même : <math>\alpha \equiv \arg\left(\frac{z' - \omega}{z - \omega}\right) \pmod{2\pi}</math></li> </ul> |

Remarque pour la rotation :

$$\begin{aligned} \begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ \left( \overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'} \right) \equiv \alpha \pmod{2\pi} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\Omega M'}{\Omega M} = 1 \\ \arg\left(\frac{z' - \omega}{z - \omega}\right) \equiv \alpha \pmod{2\pi} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \left| \frac{z' - \omega}{z - \omega} \right| = 1 \\ \arg\left(\frac{z' - \omega}{z - \omega}\right) \equiv \alpha \pmod{2\pi} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \frac{z' - \omega}{z - \omega} = [1, \alpha] = e^{i\alpha} \\ &\Leftrightarrow z' - \omega = (z - \omega)e^{i\alpha} \end{aligned}$$





| A et B et C et D et I cinq points du plan complexe tel que leurs affixes sont $z_A$ et $z_B$ et $z_C$ et $z_D$ et $z_I$   |   |
|---|---|
| <ul style="list-style-type: none"> <li><math>\ \vec{AB}\  = AB =  z_B - z_A </math></li> <li><math>z_I = \frac{z_A + z_B}{2}</math> affixe de I milieu de <math>[AB]</math></li> </ul>  | <p>Mesure de <math>(\vec{u}, \vec{AB})</math> est :</p> $(\vec{u}, \vec{AB}) \equiv \arg(z_B - z_A) [2\pi]$   |
| $\vec{AC} = k\vec{AB} \Leftrightarrow z_C - z_A = k(z_B - z_A)$<br>$\Leftrightarrow \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = k \in \mathbb{R} \quad ; (A \neq B)$  | <p>Mesure de <math>(\vec{AB}, \vec{CD})</math> est :</p> $(\vec{AB}, \vec{CD}) \equiv \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) [2\pi]$  |
| <p>A et B et C sont alignés équivaut à : <math>\arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) \equiv \pi [2\pi]</math> ou <math>\arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) \equiv 0 [2\pi]</math></p> <p><b>Remarque :</b> <math>\left(\arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) \equiv 0 [2\pi] \text{ ou } \arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) \equiv \pi [2\pi]\right)</math></p> <p>équivaut à <math>\arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) \equiv 0 [\pi]</math></p> | <p><math>Z_{\vec{u}}</math> et <math>Z_{\vec{v}}</math> affixes des vecteurs <math>\vec{u}</math> et <math>\vec{v}</math> on a</p> $(\vec{u}, \vec{v}) \equiv \arg(Z_{\vec{u}}) - \arg(Z_{\vec{v}}) [2\pi]$ <p>ou</p> $(\vec{u}, \vec{v}) \equiv \arg\left(\frac{Z_{\vec{v}}}{Z_{\vec{u}}}\right) [2\pi]$ |
| <p><math>\vec{u}</math> et <math>\vec{v}</math> sont colinéaires équivaut <math>\frac{Z_{\vec{u}}}{Z_{\vec{v}}} \in \mathbb{R} \quad (Z_{\vec{v}} \neq 0)</math></p> <p><math>\vec{u}</math> et <math>\vec{v}</math> sont orthogonaux équivaut <math>\Leftrightarrow \frac{Z_{\vec{v}}}{Z_{\vec{u}}} = bi ; (b \in \mathbb{R}^*) \quad (Z_{\vec{v}} \neq 0)</math></p> $\Leftrightarrow \arg\left(\frac{Z_{\vec{v}}}{Z_{\vec{u}}}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$                        | <p>A et B et C et D sont alignés ou cocycliques équivaut à</p> $\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} \times \frac{z_B - z_C}{z_D - z_C} \in \mathbb{R}$  |
| <p><math>(AB) // (CD) \Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \equiv \pi [2\pi] \text{ ou } \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \equiv 0 [2\pi]</math></p> $\Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \equiv 0 [\pi]$  | <p><math>(AB) \perp (CD) \Leftrightarrow (\vec{AB}, \vec{CD}) \equiv \frac{\pi}{2} [\pi]</math></p> $\Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$   |
| Relation complexe   | Signification géométrique   |
| L'ensemble des M d'affixe z tel que : $ z - z_A  =  z - z_B $   | <ol style="list-style-type: none"> <li>AM = BM . M appartient à la médiatrice du segment <math>[AB]</math>.</li> <li>L'ensemble des M c'est la médiatrice du segment <math>[AB]</math>.</li> </ol>  |
| $ z - z_A  = k \quad (k > 0)$   | <ol style="list-style-type: none"> <li>AM = k</li> <li>M appartient au cercle de centre A et de rayon k .</li> </ol>  |
| $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \left[r; \pm \frac{\pi}{2}\right] = re^{\pm \frac{\pi}{2}i}$   | <ul style="list-style-type: none"> <li>Si <math>r \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}</math> alors ABC est un triangle rectangle en A .</li> <li>Si <math>r = 1</math> alors ABC est un triangle rectangle et isocèle en A .</li> </ul>  |
| $\left \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right  = 1$  | ABC est un triangle isocèle en A .  |
| $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \left[1; \pm \frac{\pi}{3}\right] = e^{\pm \frac{\pi}{3}i}$  | ABC est un triangle équilatéral .   |