

Exercices d'applications et de réflexions avec solutions : fonctions exponentielles

PROF : ATMANI NAJIB

2ème BAC Sciences Physiques et Sciences de la Vie et de la Terre (2BAC PC et SVT)

FONCTIONS EXPONENTIELLES

Exercice1 : Résoudre les équations et inéquations suivantes dans \mathbb{R} :

$$1) \exp\left(\frac{x+5}{2x+3}\right) = \exp\left(\frac{1}{x-1}\right) \quad 2) \exp(2x+1) \leq \exp\left(\frac{6}{x}\right)$$

Solution : 1) $\ln(x-2) = 0$

a) cette équation est définie ssi : $2x+3 \neq 0$ et

$$x-1 \neq 0 \text{ donc: } x \neq -\frac{3}{2} \text{ et } x \neq 1 \text{ donc: } D_E = \mathbb{R} - \left\{-\frac{3}{2}, 1\right\}$$

b) Résoudre l'équation :

$$\exp\left(\frac{x+5}{2x+3}\right) = \exp\left(\frac{1}{x-1}\right) \Leftrightarrow \frac{x+5}{2x+3} = \frac{1}{x-1}$$

$$(x+5)(x-1) = 2x+3 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times (-8) \times 1 = 4 + 32 = 36 > 0$$

$$x_1 = \frac{-2+6}{2 \times 1} = \frac{4}{2} = 2 \text{ et } x_2 = \frac{-2-6}{2 \times 1} = \frac{-8}{2} = -4$$

Donc : $S = \{-4; 2\}$

$$2) \exp(2x+1) \leq \exp\left(\frac{6}{x}\right)$$

a) cette inéquation est définie ssi : $x \neq 0$ donc :

$$D_I = \mathbb{R}^*$$

$$2) \exp(2x+1) \leq \exp\left(\frac{6}{x}\right) \Leftrightarrow 2x+1 \leq \frac{6}{x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2 + x - 6}{x} \leq 0$$

x	$-\infty$	-2	0	$3/2$	$+\infty$
$2x+x-6$	-	0	+	+	0 -
x	-	-	0	+	+
$q(x)$	+	0	-	+	0 -

$$S =]-\infty, -2] \cup \left]0, \frac{3}{2}\right]$$

Exercice2 : Résoudre les équations et inéquations suivantes dans \mathbb{R} :

$$1) e^{1-x} \times e^{2x} = e \quad 2) \frac{e^{2-x}}{e^{1+2x}} = e^{x-1}$$

$$3) e^{2x} - 5e^x + 6 = 0 \quad 4) e^{x^2} \cdot (e^x)^3 = (e^{-x})^5 \cdot e^{-7}$$

$$5) e^{2x-3} - (e+1)e^{x-2} + 1 < 0$$

Solution : 1) $e^{1-x} \times e^{2x} = e \Leftrightarrow e^{2x+1-x} = e^1$

$$\Leftrightarrow e^{x+1} = e^1 \Leftrightarrow x+1=1 \Leftrightarrow x=0 \text{ donc: } S = \{0\}$$

$$2) \frac{e^{2-x}}{e^{1+2x}} = e^{x-1} \Leftrightarrow e^{(2-x)-(1+2x)} = e^{x-1}$$

$$\Leftrightarrow (2-x) - (1+2x) = x-1 \Leftrightarrow -4x = -2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

Donc : $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$

$$3) e^{2x} - 5e^x + 6 = 0 \Leftrightarrow (e^x)^2 - 5e^x + 6 = 0 \text{ on pose: } e^x = X$$

$$\text{Donc: } X^2 - 5X + 6 = 0 \quad \Delta = b^2 - 4ac = 25 - 24 = 1 > 0$$

$$X_1 = \frac{5+1}{2 \times 1} \text{ et } X_2 = \frac{5-1}{2 \times 1} \text{ donc: } X_1 = 3 \text{ et } X_2 = 2$$

$$\text{Donc: } e^{x_1} = 3 \text{ et } e^{x_2} = 2 \text{ donc: } x_1 = \ln 3 \text{ et } x_2 = \ln 2$$

Donc : $S = \{\ln 2, \ln 3\}$

4) cette équation est définie dans \mathbb{R}

$$e^{x^2} \cdot (e^x)^3 = (e^{-x})^5 \cdot e^{-7} \Leftrightarrow e^{x^2} \cdot e^{3x} = e^{-5x} \cdot e^{-7}$$

$$\Leftrightarrow e^{x^2+3x} = e^{-5x-7} \Leftrightarrow x^2 + 3x = -5x - 7$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 8x + 7 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 8^2 - 4 \times 7 \times 1 = 64 - 28 = 36 > 0$$

$$x_1 = \frac{-8+6}{2 \times 1} = \frac{-2}{2} = -1 \text{ et } x_2 = \frac{-8-6}{2 \times 1} = \frac{-14}{2} = -7$$

Donc : $S = \{-7; -1\}$

5) cette équation est définie dans \mathbb{R}

$$\Leftrightarrow e^{-3} (e^{2x} - (e+1)e^{x+1} + e^3) < 0$$

$$\Leftrightarrow e^{2x} - (e+1)e^{x+1} + e^3 < 0 \text{ car } e^{-3} > 0$$

$$\Leftrightarrow (e^x)^2 - (e^2 + e)e^x + e^3 < 0$$

On pose : $e^x = t$ on aura : $t^2 - (e^2 + e)t + e^3 < 0$

$$t^2 - (e^2 + e)t + e^3 = (t-e)(e^x - e^2)$$

$$2) e^{2x-3} - (e+1)e^{x-2} + 1 < 0 \Leftrightarrow (e^x - e)(e^x - e^2) < 0$$

$$\Leftrightarrow (e^x - e^1)(e^x - e^2) < 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x-2) < 0$$

$$\Leftrightarrow x \in]1; 2[\text{ donc : } S =]1; 2[$$

Exercice3 : Déterminer les limites suivantes :

$$1) \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x-1)e^x \quad 2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 3}{x} \quad 3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 3x}{x^3}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + 1}{e^x + 2} \quad 5) \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x+1} \quad 6) \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x+1}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x + e^{-x} \quad 8) \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{-x+1}{x^3+5}} \quad 9) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$$

$$10) \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - e^x \quad 11) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{x^2} \quad 12) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2 + 3x}$$

$$13) \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^3 - e^x \quad 14) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 3x}{x^3}$$

$$15) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{x^3} \text{ (on pose : } 2x = X \text{)} \quad 16) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{3x}}{x}$$

$$17) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{x^3 + x + 1} \quad 18) \lim_{x \rightarrow -\infty} (3x-1)e^x$$

$$19) \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^5 - 4x^3)e^x \quad 20) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}}$$

$$21) \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 2x)e^{2x} \quad 22) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{3x}$$

$$23) \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) \quad 24) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{1-x} - 1}{x-1}$$

$$25) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} - 1}{x}$$

$$26) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x+1} - e}{x}$$

Solution : 1) $(\forall x \in \mathbb{R}) ; (2x-1)e^x = 2(xe^x) - e^x$

On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$

donc : $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x-1)e^x = 0$

2) $(\forall x \in \mathbb{R}^*) ; \frac{e^x + 3}{x} = \frac{e^x}{x} + \frac{3}{x}$ et puisque :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

Et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x} = 0$ alors : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 3}{x} = +\infty$

$$3) (\forall x \in \mathbb{R}^*) ; \frac{e^x + 3x}{x^3} = \frac{e^x}{x^3} + \frac{3}{x^2}$$

Puisque : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x^2} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^3} = +\infty$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 3x}{x^3} = +\infty$$

$$4) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + 1}{e^x + 2} = \frac{0+1}{0+2} = \frac{1}{2} \text{ car } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+$$

$$5) \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x+1} = ? \text{ on a : } \lim_{x \rightarrow -\infty} -x+1 = +\infty$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x+1} = +\infty$$

$$6) \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x+1} \text{ on a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} -x+1 = -\infty$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x+1} = 0 \text{ car } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+$$

$$7) \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x + e^{-x} ?$$

$$\text{On a } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x + e^{-x} = +\infty$$

$$8) \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{-x+1}{x^3+5}} ? \text{ on a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x+1}{x^3+5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x^2} = 0$$

Donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{-x+1}{x^3+5}} = e^0 = 1$

9) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x \left(1 - \frac{1}{e^x}\right)}{e^x \left(1 + \frac{1}{e^x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{1}{e^x}}{1 + \frac{1}{e^x}} = \frac{1-0}{1+0} = 1$

Car : $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$

10) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - e^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(2 - \frac{e^x}{x}\right) = -\infty$

Car : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 - \frac{e^x}{x} = -\infty$

11) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} - \frac{1}{x^2}$ on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$

Et $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x^2} = 0$ donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} - \frac{1}{x^2} = +\infty$

12) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2 + 3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2 \left(1 + \frac{3}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} \times \frac{1}{1 + \frac{3}{x}}$

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{3}{x}} = 1$ alors :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2 + 3x} = +\infty$$

13) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^3 - e^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left(3 - \frac{e^x}{x^3}\right)$

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^3} = +\infty$ donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3 - \frac{e^x}{x^3} = -\infty$

Donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^3 - e^x = -\infty$ car $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$

14) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 3x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^3} + \frac{3x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^3} + \frac{3}{x^2} = +\infty$

Car : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^3} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x^2} = 0$

15) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{x^3}$ (on pose : $2x = X$)

$2x = X \Leftrightarrow x = \frac{X}{2} \quad x \rightarrow +\infty \Leftrightarrow X \rightarrow +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{x^3} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{e^X}{\left(\frac{X}{2}\right)^3} = \lim_{X \rightarrow +\infty} 8 \frac{e^X}{X^3}$$

puisque : $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{e^X}{X^3} = +\infty$ donc $\lim_{X \rightarrow +\infty} 8 \frac{e^X}{X^3} = +\infty$

donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{x^3} = +\infty$

16) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{3x}}{x}$ on pose : $3x = X$ donc : $x = \frac{X}{3}$

$x \rightarrow +\infty \Leftrightarrow X \rightarrow +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{3x}}{x} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{e^X}{\frac{X}{3}} = \lim_{X \rightarrow +\infty} 3 \frac{e^X}{X}$$
 on a $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3 \frac{e^X}{X} = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{3x}}{x} = +\infty$

17) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{x^3 + x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{x^3 \left(1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{x^3} \times \frac{1}{1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}}$

On a montré que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{x^3} = +\infty$ et on a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}} = 1$$

Donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{x^3 + x + 1} = +\infty$

18) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x - 1)e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} 3xe^x - e^x$ et on a

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+$$

Et $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0^-$ donc : $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x - 1)e^x = 0$

19) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^5 - 4x^3)e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^5 e^x - 4x^3 e^x$ et on a :

$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$ donc : $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^5 - 4x^3)e^x = 0 - 0 = 0$

20) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}}$? on pose : $\frac{1}{x} = X$

$x \rightarrow 0^- \Leftrightarrow X \rightarrow -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{X \rightarrow -\infty} X e^X = 0 \text{ donc : } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}} = 0$$

21) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 2x) e^{2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 e^{2x} - 2x e^{2x} = 0 - 2 \times 0 = 0$

Car $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$

22) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{3x}$ on pose : $2x = X$

$x \rightarrow 0 \Leftrightarrow X \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^X - 1}{3 \frac{X}{2}} = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{2}{3} \frac{e^X - 1}{X} = \frac{2}{3} \times 1 = \frac{2}{3}$$

Car : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

23) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right)$ on pose : $\frac{1}{x} = X$ donc $x = \frac{1}{X}$

$x \rightarrow +\infty \Leftrightarrow X \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{1}{X} \left(e^X - 1 \right) = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{e^X - 1}{X} = 1$$

24) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{1-x} - 1}{x-1}$ on pose : $1-x = X$ donc $x = 1-X$

$x \rightarrow 1 \Leftrightarrow X \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{1-x} - 1}{x-1} = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{e^X - 1}{-X} = \lim_{X \rightarrow 0} -\frac{e^X - 1}{X} = -1$$

car $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

25) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} - 1}{x}$ on pose : $-x = X$ donc $x = -X$

$x \rightarrow 0 \Leftrightarrow X \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} - 1}{x} = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{e^X - 1}{-X} = \lim_{X \rightarrow 0} -\frac{e^X - 1}{X} = -1$$

26) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x+1} - e}{x}$

On pose : $f(x) = e^{x+1}$ donc : $f(0) = e^{0+1} = e^1 = e$

Et : $f'(x) = (x+1)' e^{x+1} = 1 e^{x+1} = e^{x+1}$ et $f'(0) = e$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x+1} - e}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = e$$

Exercice4 : Déterminer les dérivées des fonctions suivantes : 1) $f(x) = e^{\sqrt{2x+1}}$

2) $g(x) = e^{-2x^2} - 3e^{3x+1}$ 3) $h(x) = e^{\frac{x+1}{-x+3}}$

4) $f(x) = (e^x - 4) \sqrt{e^x - 1}$

Solutions : 1) $f(x) = e^{\sqrt{2x+1}}$

la fonction : $u_1 : x \rightarrow \sqrt{2x+1}$ est dérivable sur

$$\left] -\frac{1}{2}; +\infty \right[\text{ et } u_1'(x) = \frac{(2x+1)'}{2\sqrt{2x+1}} = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$$

Donc la fonction f est dérivable sur

$$\left] -\frac{1}{2}; +\infty \right[\text{ et } f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}} e^{\sqrt{2x+1}}$$

2) $g(x) = e^{-2x^2} - 3e^{3x+1}$ les fonctions :

$u_1 : x \rightarrow -2x^2$ et $u_2 : x \rightarrow 3x+1$ sont dériviales sur \mathbb{R} et on a :

$$u_1'(x) = -4x \text{ et } u_2'(x) = 3$$

Donc la fonction g est dérivable sur \mathbb{R}

$$\text{et } g'(x) = -4x e^{-2x^2} - 9e^{3x+1}$$

3) $h(x) = e^{\frac{x+1}{-x+3}}$

la fonction : $u : x \rightarrow \frac{x+1}{-x+3}$ est dérivable sur

$$\left] 3; +\infty \right[\text{ et } \left] -\infty; 3 \right[\text{ et } u'(x) = \frac{4}{(x-3)^2}$$

Donc la fonction f est dérivable sur $]3; +\infty[$ et

$$]-\infty; 3[\text{ et } h'(x) = \frac{4}{(x-3)^2} e^{\frac{x+1}{-x+3}}$$

$$4) f(x) = (e^x - 4) \sqrt{e^x - 1}$$

$$f'(x) = ((e^x - 4) \sqrt{e^x - 1})' = ((e^x - 4))' \sqrt{e^x - 1} + (e^x - 4) (\sqrt{e^x - 1})'$$

$$f'(x) = e^x \sqrt{e^x - 1} + (e^x - 4) \frac{(e^x - 1)'}{2\sqrt{e^x - 1}} = e^x \sqrt{e^x - 1} + (e^x - 4) \frac{e^x}{2\sqrt{e^x - 1}}$$

$$f'(x) = \frac{2e^x(e^x - 1) + e^x(e^x - 4)}{2\sqrt{e^x - 1}} = \frac{2e^{2x} - 2e^x + e^{2x} - 4e^x}{2\sqrt{e^x - 1}} = \frac{3e^{2x} - 6e^x}{2\sqrt{e^x - 1}}$$

Exercice5 : Déterminer les primitives des

fonctions suivantes : 1) $f(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$

$$2) g(x) = (e^x)^2 \quad 3) h(x) = \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2}$$

Solutions : 1) $f(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ Si on pose : $u(x) = \sqrt{x}$

On a : $f(x) = 2u'(x)e^{u(x)}$ si $x > 0$ donc

les primitives de f sont :

$$F(x) = 2e^{u(x)} + \lambda = 2e^{\sqrt{x}} + \lambda \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$2) g(x) = (e^x)^2 \quad \text{Si on pose : } u(x) = e^x$$

On a : $g(x) = u'(x)u(x)$ donc les primitives de g

sont : $G(x) = \frac{1}{2}u^2(x) + \lambda = \frac{1}{2}(e^x)^2 + \lambda \quad \lambda \in \mathbb{R}$

$$3) h(x) = \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2} \quad \text{Si on pose : } u(x) = \arctan x$$

On a : $h(x) = u'(x)e^{u(x)}$ donc les primitives de h

sont : $H(x) = e^{\arctan x} + \lambda \quad \lambda \in \mathbb{R}$

Exercice6 : Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

$$1) I = \mathbb{R}; f(x) = 2e^{3x} - e^{-x}$$

$$2) I =]0; +\infty[; f(x) = \frac{e^{2x}}{(e^{2x} - 1)^2}$$

$$3) I = \mathbb{R}; f(x) = e^x (e^x - 1)^3$$

$$4) I = [0; \pi]; f(x) = \sin x e^{\cos x}$$

$$5) f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x} \quad I =]0; +\infty[$$

Solutions : 1) $I = \mathbb{R}; f(x) = 2e^{3x} - e^{-x}$

$$f(x) = 2e^{3x} - e^{-x} = \frac{2}{3}(3x)' e^{3x} + (-x)' e^{-x}$$

$F(x) = \frac{2}{3}e^{3x} + e^{-x}$ est une primitive de f sur I

$$2) I =]0; +\infty[; f(x) = \frac{e^{2x}}{(e^{2x} - 1)^2}$$

$$f(x) = \frac{e^{2x}}{(e^{2x} - 1)^2} = \frac{1}{2} \frac{(e^{2x} - 1)'}{(e^{2x} - 1)^2}$$

Donc : $F(x) = -\frac{1}{2} \frac{1}{e^{2x} - 1}$ est une primitive de f sur I

$$3) I = \mathbb{R}; f(x) = e^x (e^x - 1)^3$$

$$f(x) = e^x (e^x - 1)^3 = (e^x - 1)' (e^x - 1)^3$$

donc : $F(x) = \frac{1}{3+1} (e^x - 1)^{3+1} = \frac{1}{4} (e^x - 1)^4$ est une primitive de f sur I

$$4) I = [0; \pi]; f(x) = \sin x e^{\cos x}$$

$$f(x) = \sin x e^{\cos x} = -(\cos x)' e^{\cos x}$$

donc : $F(x) = e^{\cos x}$ est une primitive de f sur I

$$5) f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x} \quad I =]0; +\infty[$$

$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x} = \frac{(e^x - x)'}{e^x - x}$ donc : $F(x) = \ln|e^x - x|$ est une primitive de f sur I

Exercice7 : Considérons la fonction f définie par :

$$f(x) = (x-1)e^x$$

1) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

2) Etudier les branches infinies de la courbe C_f au voisinage de $+\infty$

3) Etudier la concavité de la courbe C_f

4) Construire la courbe C_f .

Solution : 1) $D_f = \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x-1)e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x - e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1)e^x = +\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

Car : $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$

Donc : $y = 0$ est une asymptote à (C) au voisinage de $-\infty$

$$f'(x) = ((x-1)e^x)' = (x-1)' e^x + (x-1)(e^x)'$$

$$f'(x) = 1e^x + (x-1)e^x = e^x + xe^x - e^x = xe^x$$

Le signe de : $f'(x)$ est celui de x

Tableau de variation :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	0	-1	$+\infty$

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-1)e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x} e^x$$

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x} e^x = 1 \times (+\infty) = +\infty$$

Donc : la courbe C_f admet une branche parabolique dans la direction de l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$

3) Etudie de la concavité de la courbe C_f :

$$f''(x) = (xe^x)' = (x)' e^x + x(e^x)' = e^x (1+x)$$

Le signe de : $f''(x)$ est celui de : $x+1$

$$x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$$

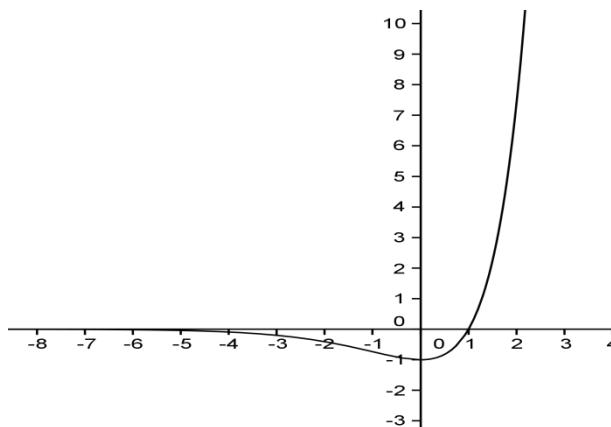
x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$x+1$	-	0	+

Donc :

(C_f) est convexe sur $[-1; +\infty[$

(C_f) est concave sur $]-\infty; -1]$ et $A(-1, -2e^{-1})$ est un point d'inflexion de (C_f)

4)



Exercice8 : Considérons la fonction f définie

$$\text{par : } f(x) = x-1 + \frac{3}{e^x+1}$$

1) déterminer D_f et calculer les limites aux bornes de D_f

2) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

$$3) \text{montrer que : } (\forall x \in \mathbb{R}); f(x) = x+2 - \frac{3e^x}{e^x+1}$$

4) Etudier les branches infinies de la courbe C_f Et étudier la position de la courbe C_f avec les asymptotes obliques

Solutions :

$$1) D_f = \{x \in \mathbb{R} / e^x + 1 \neq 0\}$$

$$e^x + 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = -1 \text{ pas de solutions car } e^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Donc : $D_f = \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x-1 + \frac{3}{e^x+1} = +\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} x-1 = +\infty$$

Et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{e^x + 1} = 0$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x - 1 + \frac{3}{e^x + 1} = -\infty$ car $\lim_{x \rightarrow -\infty} x - 1 = -\infty$

Et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{e^x + 1} = 3$

$$2) f'(x) = \left(x - 1 + \frac{3}{e^x + 1} \right)' = 1 - 3 \frac{(e^x + 1)'}{(e^x + 1)^2} = 1 - 3 \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(e^x + 1)^2 - 3e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{(e^x)^2 + 2e^x + 1 - 3e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{(e^x)^2 - e^x + 1}{(e^x + 1)^2}$$

Le signe de : $f'(x)$ est celui de : $(e^x)^2 - e^x + 1$

On pose : $e^x = X$ donc on a : $X^2 - X + 1 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4 = -3 < 0$$

Donc : $X^2 - X + 1 > 0$ (signe de a)

Donc : $(e^x)^2 - e^x + 1 > 0$ par suite: $f'(x) > 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

3) montrons que : $(\forall x \in \mathbb{R}); f(x) = x + 2 - \frac{3e^x}{e^x + 1}$

$$f(x) = x - 1 + \frac{3}{e^x + 1} = x + 2 - 3 + \frac{3}{e^x + 1}$$

$$f(x) = x + 2 + \frac{-3(e^x + 1) + 3}{e^x + 1} = x + 2 + \frac{-3e^x - 3 + 3}{e^x + 1}$$

$$f(x) = x + 2 - \frac{3e^x}{e^x + 1}$$

4) Etude des branches infinies ?

a) On a $f(x) = x - 1 + \frac{3}{e^x + 1}$ donc $f(x) - (x - 1) = \frac{3}{e^x + 1}$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{e^x + 1} = 0$$

Par suite : la droite d'équation $(\Delta) y = x - 1$ est une asymptote oblique à la courbe C_f au voisinage

de $+\infty$ et on a aussi : $f(x) - (x - 1) = \frac{3}{e^x + 1} > 0$

Donc : la courbe C_f est au-dessus de la droite d'équation $(\Delta) y = x - 1$

b) On a $f(x) = x + 2 - \frac{3e^x}{e^x + 1}$ donc $f(x) - (x + 2) = -\frac{3e^x}{e^x + 1}$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (x + 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{3e^x}{e^x + 1} = 0$$

Par suite : la droite d'équation $(D) y = x + 2$ est une asymptote oblique à la courbe C_f au voisinage

$$\text{de } -\infty \text{ et on a aussi : } f(x) - (x + 2) = -\frac{3e^x}{e^x + 1} < 0$$

Donc : la courbe C_f est au-dessous de la droite d'équation $(D) y = x + 2$

Exercice 9 : Considérons la fonction f définie par :

$$f(x) = (e^x - 4) \sqrt{e^x - 1}$$

1) déterminer D_f et calculer les limites aux bornes de D_f

$$2) \text{montrer que : } (\forall x \in \mathbb{R}_*^+) \frac{f(x)}{x} = \frac{e^x - 4}{\sqrt{e^x - 1}} \cdot \frac{e^x - 1}{x}$$

3) Etudier la dérivable de la fonction f à droite de 0 et interpréter géométriquement le résultat obtenu

$$4) \text{montrer que : } (\forall x \in \mathbb{R}_*^+) f'(x) = \frac{3e^x(e^x - 2)}{2\sqrt{e^x - 1}}$$

5) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

6) Etudier les branches infinies de la courbe C_f Au voisinage de $+\infty$

7) calculer : $f(2 \ln 2)$ et construire la courbe C_f .

Solutions : 1) $D_f = \{x \in \mathbb{R} / e^x - 1 \geq 0\}$

$$e^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq \ln 1 \Leftrightarrow x \geq 0$$

Donc : $D_f = \mathbb{R}^+$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - 4) \sqrt{e^x - 1} = +\infty$$

Car : $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - 4 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{e^x - 1} = +\infty$

$$2) \frac{f(x)}{x} = \frac{(e^x - 4)\sqrt{e^x - 1}}{x} = \frac{(e^x - 4)(\sqrt{e^x - 1})^2}{x\sqrt{e^x - 1}}$$

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{(e^x - 4)(e^x - 1)}{x\sqrt{e^x - 1}} = \frac{e^x - 4}{\sqrt{e^x - 1}} \cdot \frac{e^x - 1}{x}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 4}{\sqrt{e^x - 1}} \cdot \frac{e^x - 1}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 4}{\sqrt{e^x - 1}} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{x} \text{ puisque : } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\text{Et } \lim_{x \rightarrow 0^+} e^x - 4 = -3 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{e^x - 1} = 0^+$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -\infty$$

Donc la fonction f n'est pas dérivable à droite de 0

Interprétation géométriquement :

la courbe C_f admet une demie tangente vertical adroite du point $O(0;0)$ dirigé vers le bas

$$\text{car : } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -\infty \quad (+) \times (-) = (-)$$

$$4) \text{ montrons que : } (\forall x \in \mathbb{R}_*^+) f'(x) = \frac{3e^x(e^x - 2)}{2\sqrt{e^x - 1}} ?$$

$$f'(x) = \left((e^x - 4)\sqrt{e^x - 1} \right)' = (e^x - 4)' \sqrt{e^x - 1} + (e^x - 4) \left(\sqrt{e^x - 1} \right)'$$

$$f'(x) = e^x \sqrt{e^x - 1} + (e^x - 4) \frac{(e^x - 1)'}{2\sqrt{e^x - 1}} = e^x \sqrt{e^x - 1} + \frac{e^x(e^x - 4)}{2\sqrt{e^x - 1}}$$

$$f'(x) = \frac{2e^x(\sqrt{e^x - 1})^2 + e^x(e^x - 4)}{2\sqrt{e^x - 1}} = \frac{2e^x(e^x - 1) + e^x(e^x - 4)}{2\sqrt{e^x - 1}}$$

$$f'(x) = \frac{2e^{2x} - 2e^x + e^{2x} - 4e^x}{2\sqrt{e^x - 1}} = \frac{3e^{2x} - 6e^x}{2\sqrt{e^x - 1}} = \frac{3e^x(e^x - 2)}{2\sqrt{e^x - 1}}$$

5) le signe de : $f'(x)$ est celui de $e^x - 2$

$$\text{car } \frac{3e^x}{2\sqrt{e^x - 1}} > 0 \quad (\forall x \in \mathbb{R}_*^+)$$

$$e^x - 2 > 0 \Leftrightarrow e^x > 2 \Leftrightarrow x > \ln 2$$

$$f(\ln 2) = (e^{\ln 2} - 4)\sqrt{e^{\ln 2} - 1} = (2 - 4)\sqrt{2 - 1} = -2$$

x	0	$\ln 2$	$+\infty$
$f'(x)$	—	0	+
$f(x)$	0	$\nearrow -2$	$\nearrow +\infty$

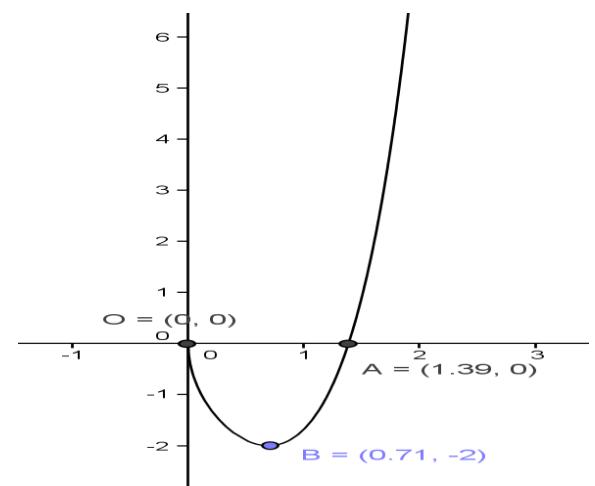
6) Etude des branches infinies de la courbe C_f
Au voisinage de $+\infty$?

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x}{x} - \frac{4}{x} \right) \sqrt{e^x - 1}$$

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{e^x - 1} = +\infty$$

Donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ Donc : la courbe C_f admet une branche parabolique dans la direction de l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$

$$f(2\ln 2) = (e^{2\ln 2} - 4)\sqrt{e^{2\ln 2} - 1} = (e^{\ln 4} - 4)\sqrt{e^{\ln 4} - 1} = (4 - 4)\sqrt{4 - 1} = 0$$



Exercice 10 : Considérons la fonction f définie par : $f(x) = \sqrt{e^{-x} - e^{-2x}}$

1) déterminer D_f et calculer les limites aux bornes de D_f

2) Etudier la continuité et la dérivabilité de la fonction f à droite de 0 et interpréter géométriquement le résultat obtenu

3) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

4) construire la courbe C_f .

Solutions : 1) $D_f = \{x \in \mathbb{R} / e^{-x} - e^{-2x} \geq 0\}$

$$e^{-x} - e^{-2x} \geq 0 \Leftrightarrow e^{-x} \geq e^{-2x} \Leftrightarrow -x \geq -2x \Leftrightarrow x \geq 0$$

Donc : $D_f = [0; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{e^{-x} - e^{-2x}} = 0$$

Car : $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x} = 0$

$$2) \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{e^{-x} - e^{-2x}} = 0 = f(0)$$

Donc f est continue à droite de 0

b)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{e^{-x} - e^{-2x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{\frac{e^{-x}(1 - e^{-x})}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{\frac{e^{-x} \times \frac{e^{-x} - 1}{-x}}{-x}} \text{ on a : } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-x}}{x} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-x} - 1}{-x} = 1$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = +\infty$$

Donc la fonction f n'est pas dérivable à droite de 0

Interprétation géométriquement :

la courbe C_f admet une demie tangente vertical adroite du point $O(0;0)$ dirigé vers le haut

$$\text{car : } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = +\infty \quad (+) \times (+) = (+)$$

3) Etude des variations de f :

$$f'(x) = \left(\sqrt{e^{-x} - e^{-2x}} \right)' = \frac{(e^{-x} - e^{-2x})'}{2\sqrt{e^{-x} - e^{-2x}}^2}$$

$$f'(x) = \frac{-e^{-x} + 2e^{-2x}}{2\sqrt{e^{-x} - e^{-2x}}^2} = \frac{e^{-x}(2e^{-x} - 1)}{2\sqrt{e^{-x} - e^{-2x}}^2}$$

le signe de : $f'(x)$ est celui de $2e^{-x} - 1$

$$\text{car } \frac{e^{-x}}{2\sqrt{e^{-x} - e^{-2x}}^2} > 0 \quad (\forall x \in \mathbb{R}_*^+)$$

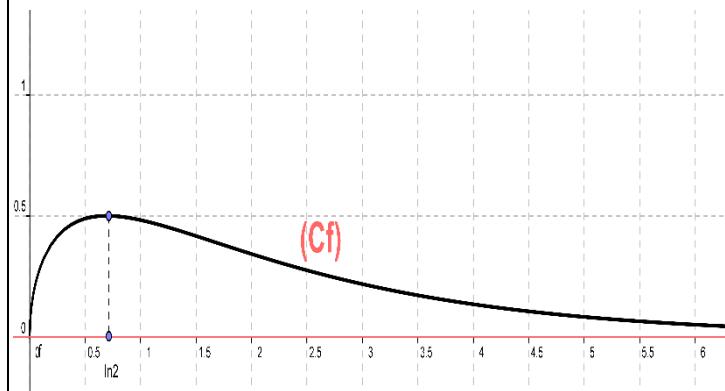
$$\text{on a : } 2e^{-x} - 1 = \frac{1}{e^x}(2 - e^x)$$

$$2 - e^x > 0 \Leftrightarrow e^x < 2 \Leftrightarrow x < \ln 2$$

$$f(\ln 2) = \sqrt{e^{-\ln 2} - e^{-2\ln 2}} = \sqrt{\frac{1}{e^{\ln 2}} - \frac{1}{e^{2\ln 2}}} = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

x	0	$\ln 2$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	0	$\frac{1}{2}$	0

4) la courbe C_f :



Exercice 11 : Considérons la fonction f définie

$$\text{par : } f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{1 - e^{2x}}}$$

1) déterminer D_f et calculer les limites aux bornes de D_f

2) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

3) montrer que f admet une fonction réciproque définie sur un intervalle J que l'on déterminera

4) déterminer : $f^{-1}(x) \quad \forall x \in J$

$$\text{Solutions : } f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{1 - e^{2x}}}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / 1 - e^{2x} > 0\}$$

$$1 - e^{2x} > 0 \Leftrightarrow 1 > e^{2x} \Leftrightarrow e^0 > e^{2x} \Leftrightarrow 0 > 2x \Leftrightarrow x < 0$$

$$\text{Donc : } D_f =]-\infty, 0[$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} = \frac{0}{\sqrt{1-0}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x} \left(\frac{1}{e^{2x}} - 1 \right)}} = +\infty$$

Car : $\lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{e^{2x} \left(\frac{1}{e^{2x}} - 1 \right)} = 0^+$

$$2) f'(x) = \left(\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} \right)' = \frac{(e^x)' \sqrt{1-e^{2x}} - e^x (\sqrt{1-e^{2x}})'}{(\sqrt{1-e^{2x}})^2}$$

$$f'(x) = \frac{e^x \sqrt{1-e^{2x}} - e^x \frac{(1-e^{2x})'}{2\sqrt{1-e^{2x}}}}{(\sqrt{1-e^{2x}})^2} = \frac{2e^x (1-e^{2x}) + 2e^x e^{2x}}{2\sqrt{1-e^{2x}} (1-e^{2x})}$$

$$f'(x) = \frac{2e^x - 2e^{3x} + 2e^{3x}}{2\sqrt{1-e^{2x}} (1-e^{2x})} = \frac{2e^x}{2\sqrt{1-e^{2x}} (1-e^{2x})} > 0$$

$$\forall x \in]-\infty, 0[$$

x	$-\infty$	0
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	0	$+\infty$

3) on a f est une fonction continue et strictement croissante sur $I =]-\infty, 0[$ donc f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur l' intervalle

$$J = f(I) = f(]-\infty, 0[) =]0; +\infty[$$

$$\begin{cases} f(y) = x \\ y \in I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = f^{-1}(x) \\ x \in J \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{e^y}{\sqrt{1-e^{2y}}} = x \\ y \in]-\infty, 0[\end{cases} \Leftrightarrow \left(\frac{e^y}{\sqrt{1-e^{2y}}} \right)^2 = x^2 \Leftrightarrow \frac{e^{2y}}{1-e^{2y}} = x^2$$

$$e^{2y} = x^2 (1-e^{2y}) \Leftrightarrow e^{2y} = x^2 - x^2 e^{2y} \Leftrightarrow e^{2y} + x^2 e^{2y} = x^2$$

$$e^{2y} (1+x^2) = x^2 \Leftrightarrow e^{2y} = \frac{x^2}{1+x^2} \Leftrightarrow 2y = \ln \left(\frac{x^2}{1+x^2} \right)$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x^2}{1+x^2} \right) \Leftrightarrow y = \ln \left(\frac{x^2}{1+x^2} \right)^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow y = \ln \sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}}$$

$$\text{Donc: } f^{-1}(x) = \ln \sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}} \quad \forall x \in]0; +\infty[$$

Exercice 12 : Considérons la fonction f définie sur

\mathbb{R} par : $f(x) = 1 - \ln(1 + e^{-x})$ et soit (C) la courbe

De f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ avec

$$\|\vec{i}\| = 2\text{cm}$$

1)a) montrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ et interpréter géométriquement le résultat

b) montrer que : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

2)a) vérifier que: $\forall x \in \mathbb{R} ; f(x) = x + 1 - \ln(1 + e^x)$

b) en déduire la droite (D) d'équation : $y = x + 1$ est une asymptote oblique à la courbe C_f au voisinage de $-\infty$
c) étudier la position de la courbe C_f avec la droite (D)

3)a) montrer que : $\forall x \in \mathbb{R} ; f'(x) = \frac{1}{1+e^x}$

b) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

c) Etudier la concavité de C_f

d) montrer que la courbe C_f coupe l'axe des abscisses en un point à déterminer

4) Construire la courbe C_f dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$

5) a) montrer que f admet une fonction réciproque définie sur un intervalle J que l'on déterminera

b) déterminer : $f^{-1}(x) \quad \forall x \in J$

Solutions : $f(x) = 1 - \ln(1 + e^{-x})$

1)a)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \ln(1 + e^{-x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \ln \left(1 + \frac{1}{e^x} \right) = 1$$

Car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$

Interprétation géométriquement :

$y = 1$ est une asymptote à C au voisinage de $+\infty$

$$1)b) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - \ln\left(1 + \frac{1}{e^x}\right) = -\infty$$

$$\text{Car: } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^x} = +\infty$$

2)a) Montrons que: $\forall x \in \mathbb{R} ; f(x) = x + 1 - \ln(1 + e^x)$?

$$f(x) = 1 - \ln(1 + e^{-x}) = 1 - \ln\left(1 + \frac{1}{e^x}\right) = 1 - \ln\left(\frac{e^x + 1}{e^x}\right)$$

$$f(x) = 1 - \ln(e^x + 1) + \ln(e^x) = 1 - \ln(e^x + 1) + x$$

$$\text{Donc: } f(x) = x + 1 - \ln(e^x + 1) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$2)b) \text{on a: } f(x) = x + 1 - \ln(e^x + 1)$$

$$\text{Donc: } f(x) - (x + 1) = -\ln(e^x + 1)$$

$$\text{Donc: } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (x + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\ln(e^x + 1) = 0 \quad \text{car: } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

Par suite : la droite d'équation (D) : $y = x + 1$ est une asymptote oblique à la courbe Cf au voisinage de $-\infty$

$$2)c) f(x) - (x + 1) = -\ln(e^x + 1)$$

On a: $e^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ donc: $e^x + 1 > 1$

$$\text{Donc: } \ln(e^x + 1) > \ln 1 \quad \text{Donc: } \ln(e^x + 1) > 0$$

$$\text{Donc: } -\ln(e^x + 1) < 0$$

Donc : la courbe Cf est au-dessous de la droite d'équation (D) : $y = x + 1$

3)a) montrons que : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{1}{1 + e^x}$?

$$f'(x) = (x + 1 - \ln(1 + e^x))' = 1 - \frac{(1 + e^x)'}{1 + e^x} = 1 - \frac{e^x}{1 + e^x}$$

$$f'(x) = \frac{1 + e^x - e^x}{1 + e^x} = \frac{1}{1 + e^x} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

3)b) Tableau de variation :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow 1$

3)c) Etude de la concavité de Cf :

$$f''(x) = \left(\frac{1}{1 + e^x}\right)' = -\frac{(1 + e^x)'}{(1 + e^x)^2} = -\frac{e^x}{(1 + e^x)^2} < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

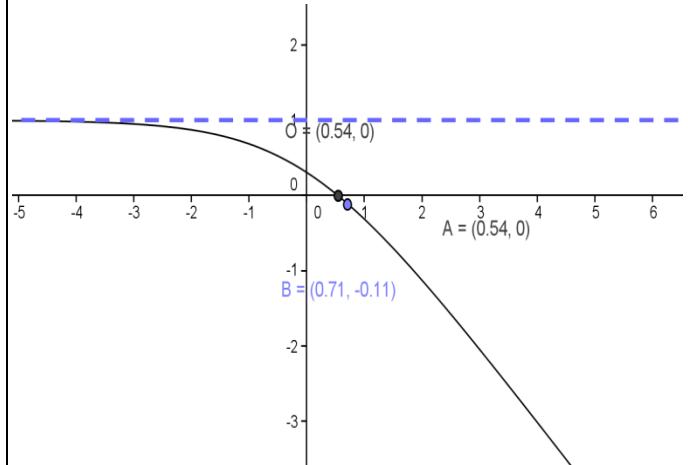
la courbe Cf est convexe dans \mathbb{R} ,

$$3)d) f(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln(1 + e^{-x}) = 0 \Leftrightarrow \ln(1 + e^{-x}) = 1$$

$$\Leftrightarrow \ln(1 + e^{-x}) = \ln e \Leftrightarrow e^{-x} = e - 1 \Leftrightarrow -x = \ln(e - 1)$$

$\Leftrightarrow x = -\ln(e - 1)$ Donc le point d'intersection de la courbe Cf avec l'axe des abscisses est :

$$A(-\ln(e - 1); 0)$$



5) a) on a f est une fonction continue et strictement croissante sur \mathbb{R} donc f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur l' intervalle

$$J = f(I) = f(\mathbb{R}) =]-\infty; 1[$$

$$\begin{cases} f(y) = x \\ y \in I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = f^{-1}(x) \\ x \in J \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 - \ln(1 + e^{-y}) = x \\ y \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow 1 - x = \ln(1 + e^{-y}) \Leftrightarrow 1 + e^{-y} = e^{1-x}$$

$$e^{-y} = e^{1-x} - 1 \Leftrightarrow -y = \ln(e^{1-x} - 1) \Leftrightarrow y = -\ln(e^{1-x} - 1)$$

Donc: $\forall x \in]-\infty; 1[\quad f^{-1}(x) = -\ln(e^{1-x} - 1)$

Exercice13 :

Partie 1 : Considérons la fonction f définie sur \mathbb{R}^+

par : $f(x) = (x+2)e^{\frac{-2}{x}}$ si $x > 0$ et $f(0) = 0$

1) Etudier la continuité et la dérivabilité de la fonction f à droite de 0.

2) Interpréter géométriquement le résultat obtenu.

3) Déterminer la limite en $+\infty$

4) Déterminer la fonction dérivée de la fonction f puis dresser le tableau de variation de f .

5) a) Montrer que ($\forall t > 0$) $0 < e^{-t} + t - 1 < \frac{t^2}{2}$

b) En déduire que : ($\forall x > 0$)

$$\frac{-4}{x} < f(x) - x < \frac{4}{x^2} - \frac{2}{x}$$

c) Déterminer la nature de la branche infinie de la courbe C_f au voisinage de $+\infty$

6) Construire la courbe C_f .

Partie 2 :

Considérons la fonction f_n définie sur \mathbb{R}^+ par :

$f_n(x) = (x+2n)e^{\frac{-2}{x}}$ si $x > 0$ et $f_n(0) = 0$

où $n \in \mathbb{N}^*$

1) a) Etudier la continuité et la dérivabilité de la fonction f_n à droite de 0.

b) Déterminer la limite en $+\infty$

c) Déterminer la fonction dérivée de la fonction f_n

puis dresser le tableau de variation de f_n .

2) Montrer que l'équation $f_n(x) = \frac{2}{n}$

admet une solution unique α_n dans $]0, +\infty[$

3) a) Montrer que ($\forall x > 0$)

$$f_{n+1}(x) - \frac{2}{n+1} > f_n(x) - \frac{2}{n}$$

b) En déduire la monotonie de $(\alpha_n)_n$

c) Montrer que la suite $(\alpha_n)_n$ est convergente et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\alpha_n)_n = 0$

Exercice14 : Résoudre les équations et inéquations suivantes dans \mathbb{R} :

1) $5^x = 15 \quad 2) \quad 3^{2x} \geq 5^{1-x} \quad 3) \quad 7^{x+1} - 7^{-x} < 6$

Solution : 1) $5^x = 15$

$$5^x = 15 \Leftrightarrow e^{x \ln 5} = 15 \Leftrightarrow x \ln 5 = \ln 15 \Leftrightarrow x = \frac{\ln 15}{\ln 5}$$

$$\text{Donc : } S = \left\{ \frac{\ln 15}{\ln 5} \right\} \cup \{0\}$$

2) $3^{2x} \geq 5^{1-x} \Leftrightarrow \ln(3^{2x}) \geq \ln(5^{1-x})$

$$\Leftrightarrow 2x \ln 3 \geq (1-x) \ln 5 \Leftrightarrow x(2 \ln 3 + \ln 5) \geq \ln 5$$

$$\text{Donc : } S = \left[\frac{\ln 5}{2 \ln 3 + \ln 5}; +\infty \right[$$

3) $7^{x+1} - 7^{-x} < 6 \Leftrightarrow 7^{x+1} - \frac{1}{7^x} < 6 \quad \text{on a } 7^x > 0$

$$7^{2x+1} - 1 < 6 \times 7^x \Leftrightarrow 7 \times (7^x)^2 - 6 \times 7^x - 1 < 0$$

on pose : $t = 7^x \Leftrightarrow 7t^2 - 6 \times t - 1 < 0$

$$\text{on a : } 7t^2 - 6 \times t - 1 = (t-1)(7t+1)$$

$$7^{x+1} - 7^{-x} < 6 \Leftrightarrow (7^x - 1)(7 \times 7^x + 1) < 0$$

$$\Leftrightarrow (7^x - 1)(7^{x+1} + 1) < 0 \Leftrightarrow 7^x - 1 < 0 \quad \text{car } 7^{x+1} > 0$$

$$\Leftrightarrow 7^x < 1 \Leftrightarrow 7^x < 7^0 \Leftrightarrow x < 0 \quad \text{car } x \rightarrow 7^x \text{ est}$$

strictement croissante ($7 > 1$) donc : $S =]-\infty; 0[$

Exercice15 : Résoudre les équations et inéquations suivantes dans \mathbb{R} :

1) $2^{x+1} = 8^x \quad 2) \quad 3^x = 12 \quad 3) \quad 5 \times 2^x + 2^{x+1} - 336 = 0$

4) $100^x + 40 = 14 \times 10^x$

5) $2^{x-1} > 4^x \quad 5) \quad (0,5)^{2x} \geq (0,5)^{x+1}$

Solution : 1) $2^{x+1} = 8^x \Leftrightarrow 2^{x+1} = (2^3)^x \Leftrightarrow 2^{x+1} = 2^{3x}$

$$x+1=3x \Leftrightarrow 1=2x \Leftrightarrow \frac{1}{2}=x \text{ donc : } S=\left\{\frac{1}{2}\right\}$$

$$2) 3^x=12 \Leftrightarrow x=\log_3 12 \text{ donc : } S=\{\log_3 12\}$$

$$3) 2^x - 3 \times 2^{x+1} - 16 = 0 \Leftrightarrow 2^x - 6 \times 2^x - 16 = 0$$

On pose : $2^x = X$ donc : $X^2 - 6X - 16 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 + 4 \times 1 \times 16 = 100 > 0$$

Donc : $X_1 = 8$ et $X_2 = -2$

Donc : $2^x = 8$ et $2^x = -2$ or $2^x > 0$ donc

l'équation $2^x = -2$ n'a pas de solutions

$$2^x = 8 \Leftrightarrow x = \log_2 8 \Leftrightarrow x = \log_2 2^3 \Leftrightarrow x = 3 \text{ donc : } S = \{3\}$$

$$4) 100^x + 40 = 14 \times 10^x \Leftrightarrow 10^{2x} - 14 \times 10^x + 40 = 0$$

$$\Leftrightarrow (10^x)^2 - 14 \times 10^x + 40 = 0 \text{ on pose : } 10^x = X$$

On a alors : $X^2 - 14X + 40 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-14)^2 - 4 \times 40 = 36 > 0$$

$$X_1 = \frac{14+6}{2 \times 1} \text{ et } X_2 = \frac{14-6}{2 \times 1} \text{ donc : } X_1 = 10 \text{ et } X_2 = 4$$

Donc : $10^{x_1} = 10$ et $10^{x_2} = 4$ donc : $x_1 = 1$ et

$$x_2 = \log_{10} 4 \text{ Donc : } S = \{1, \log_{10} 4\}$$

$$5) 2^{x-1} > 4^x \Leftrightarrow 2^{x-1} > (2^2)^x \Leftrightarrow 2^{x-1} > 2^{2x} \Leftrightarrow x-1 > 2x$$

$$\Leftrightarrow -1 > x \text{ donc : } S =]-\infty, -1[$$

$$6) (0,5)^{2x} > (0,5)^{x+1} \Leftrightarrow 2x < x+1 \text{ car } x \rightarrow (0,5)^x \text{ est}$$

strictement décroissante car : $0 < 0,5 < 1$

$$(0,5)^{2x} > (0,5)^{x+1} \Leftrightarrow x < 1 \text{ donc : } S =]-\infty, 1[$$

Exercice16: Déterminer les primitives de la fonction suivante : $f(x) = 3^{x-2}$

Solutions : 1) $f(x) = 3^{x-2}$ Si on pose : $u(x) = x-2$

On a : $f(x) = u'(x)3^{u(x)}$ donc les primitives de f

$$\text{sont : } F(x) = \frac{1}{\ln 3} 3^{u(x)} + \lambda = \frac{1}{\ln 3} 3^{x-2} + \lambda \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Exercice17: Soit La fonction f définie par :

$$f(x) = 4^x - 2^{x+1} \quad 1) \text{déterminer } D_f$$

2) calculer les limites aux bornes de D_f

3) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

4) Etudier les branches infinies de la courbe C_f

5) construire la courbe C_f dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$

Solutions : 1) $f(x) = e^{x \ln 4} - e^{(x+1) \ln 2}$

Donc : $D_f = \mathbb{R}$

2)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x \ln 2} - e^{(x+1) \ln 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \ln 2} (e^{x \ln 2} - 2) = +\infty$$

$$\text{Car : } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x \ln 2} - e^{(x+1) \ln 2} = 0 \text{ Car : } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

3) f est dérivable sur \mathbb{R} car la somme de fonctions dérивables sur \mathbb{R} :

$$\forall x \in \mathbb{R} : f'(x) = 2 \ln 2 \times e^{x \ln 2} \times (e^{x \ln 2} - 1)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{x \ln 2} - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Tableau de variation de f :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	—	0	+
$f(x)$	$0 \searrow$	-1	$\nearrow +\infty$

4) Etude des branches infinies de la courbe C_f :

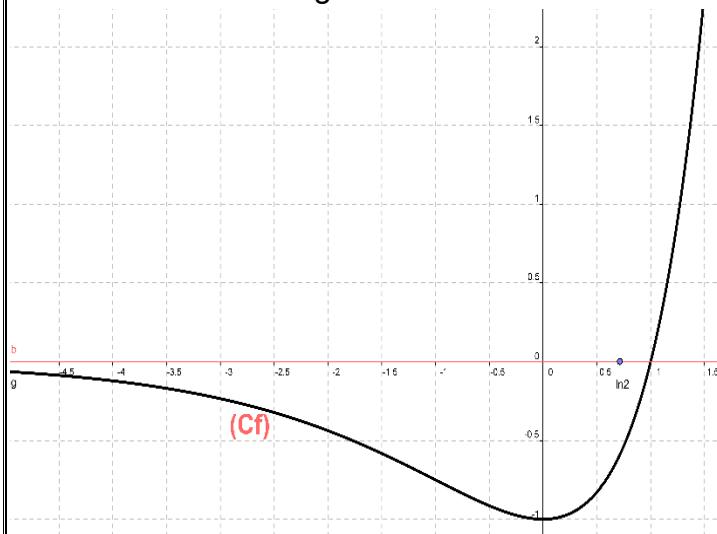
$$\text{a) on a : } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \text{ donc : } y = 0$$

est une asymptote a(C)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x \ln 2}}{x} (e^{x \ln 2} - 2) = +\infty$$

$$\text{Car : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{X} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

Donc : la courbe C_f admet une branche parabolique dans la direction de l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$



Exercice 18: Soit La fonction f définie sur \mathbb{R}^+ par : $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \rightarrow x^x, \text{ si } x \neq 0 \text{ et } f(0) = 0$$

- 1) Etudier la continuité de la fonction f à droite de 0.
- 2) Etudier la dérivabilité de la fonction f à droite de 0.
- 3) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
- 4) Déterminer la nature de la branche infinie de la courbe C_f au voisinage de $+\infty$.
- 5) Tracer la courbe C_f .
- 6) Résoudre dans \mathbb{R} , l'équation $f(x) = x$
- 7) Soit la suite $(u_n)_n$ définie par : $u_0 = \frac{1}{e}$ et $(\forall n \in \mathbb{N})(u_{n+1} = f(u_n))$.

a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})(u_n \leq 1)$

b) Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_n$; puis en déduire qu'elle convergente.

c) Déterminer la limite de la suite $(u_n)_n$

Exercice 19 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$; considérons la fonction f_n définie sur $[1, +\infty[$ par :

$$f_n(x) = \frac{1}{n!} \frac{(\ln x)^n}{x^2} \text{ si } x > 0 \text{ et } f_n(0) = 0$$

et (C_n) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\mathcal{R}(O, i^{\rightarrow}, j^{\rightarrow})$.

1. Donner le tableau de variation de f_1 .
2. Déterminer l'équation de la tangente (T_1) à la courbe (C_1) en point d'abscisse 1.
3. Construire la courbe (C_1) et la tangente (T_1) dans le repère $\mathcal{R}(O, i^{\rightarrow}, j^{\rightarrow})$.
4. Dresser le tableau de variation de la fonction f_n .
5. a) Etudier sur l'intervalle $[1, +\infty[$ le signe de : $f_2(x) - f_1(x)$
- b) En déduire les positions relatives des deux courbes (C_1) et (C_2) ; puis construire (C_2)
6. Considérons la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ où u_n est la valeur maximale de la fonction f_n .

a) Vérifier que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : u_n = \frac{1}{n!} \left(\frac{n}{2e} \right)^n$

b) Pour $x \in]1, +\infty[$; calculer $\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}$

c) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) (u_{n+1} = \frac{1}{2} f_n(e^{\frac{n+1}{2}}))$

d) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) (u_n \leq \frac{1}{e} \frac{1}{2^n})$

Et en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

Exercice 20 : Partie 1

1. En utilisant le T.A.F sur la fonction : $t \rightarrow e^{-t}$; montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^*+)(\exists \theta \in \mathbb{R}^*+)(e^\theta = \frac{x}{1-e^{-x}})$

2. En déduire que : $(\forall x > 0)(1-x < e^{-x})$ et que $(\forall x > 0)(1+x < e^x)$

3. En déduire que : $(\forall x > 0)(0 < \ln\left(\frac{xe^x}{e^x-1}\right) < x)$

Partie 2

Considérons la fonction f définie sur $[0, +\infty[$

Par : $f(x) = \frac{xe^x}{e^x-1}$ Si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$

1) Etudier la continuité de la fonction f sur $[0, +\infty[$.

2) Déterminer la limite de f quand x tend vers $+\infty$ et étudier la branche infinie de la courbe C_f au voisinage de $+\infty$.

3) a) Montrer que ($\forall x > 0$)

$$\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} < e^{-x} + x - 1 < \frac{x^2}{2} \right)$$

b) Montrer que ($\forall x > 0$) $\left(\frac{f(x) - 1}{x} = \frac{e^{-x} + x - 1}{x^2} \cdot f(x) \right)$

c) En déduire que f est dérivable à droite de 0 et donner une interprétation géométrique au résultat obtenu.

4) a) Montrer que : ($\forall x > 0$) $\left(f'(x) = \frac{e^x(e^x - x - 1)}{(e^x - 1)^2} \right)$

b) En déduire que f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$. Dresser le tableau de variation de f .

c) Construire la courbe C_f .

d) Montrer que f est une bijection de $[0, +\infty[$.
Vers $J = f([0, +\infty[)$.

Partie 3 : Considérons la suite $(u_n)_n$ définie par :

$u_0 \in]0, +\infty[$ et ($\forall n \in \mathbb{N}$) ($u_{n+1} = \ln(f(u_n))$).

1) Montrer que la suite $(u_n)_n$ est strictement positive,

2) Montrer que la suite $(u_n)_n$ strictement décroissante, puis en déduire qu'elle est convergente.

3) a) Montrer que l'équation $\ln(f(x)) = x$ admet 0 comme seule solution.

b) En déduire la limite de la suite $(u_n)_n$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »
Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices Que l'on devient un mathématicien

