

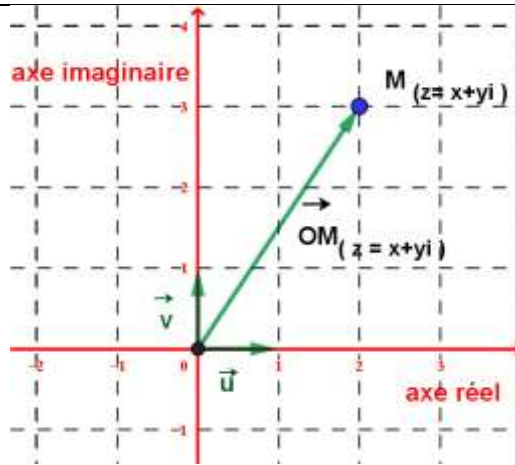


Nombre complexe

- Le nombre de la forme $z = a + bi$ tel que $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ s'appelle nombre complexe .
- $a = \text{Re}(z)$ partie réelle de z ; $b = \text{Im}(z)$ partie imaginaire de z .
- $z = a \in \mathbb{R}$ s'appelle réel pur ; $z = bi$; $(b \in \mathbb{R}^*)$ s'appelle nombre complexe imaginaire pur
- $\bar{z} = a - bi$ s'appelle le conjugué de $z = a + bi$.
- $\mathbb{C}$ est l'ensemble des nombres complexes . $\mathbb{C}$ est muni des opérations l'addition et la multiplication qui prolongent les mêmes opérations dans $\mathbb{R}$ ont mêmes propriétés que dans $\mathbb{R}$. le reste de la leçon on considéré $z = x + yi$ et $z' = x' + y'i$ de $\mathbb{C}$ ($a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$)
- ❖ Addition dans $\mathbb{C}$: $z + z' = x + yi + x' + y'i = (x + x') + (y + y')i$. $x, y; x'$ et $y' \in \mathbb{R}$
- ❖ Multiplication dans $\mathbb{C}$: $z \times z' = (x + yi) \times (x' + y'i) = (xx' - yy') + (xy' + yx')i$.
cas particulier $k \in \mathbb{R}$: $k.z = k.(x + yi) = kx + kyi$
- ❖ L'inverse de $z = a + bi \neq 0 ((a, b) \neq (0, 0))$:
$$\frac{1}{z'} = \frac{1}{x' + y'i} = \frac{1 \times \bar{z}'}{z' \bar{z}'} = \frac{1 \times (x' - y'i)}{(x' + y'i)(x' - y'i)} = \frac{x'}{x'^2 + y'^2} - \frac{y'}{x'^2 + y'^2} i$$
- ❖ Le quotient de z par z' :
$$\frac{z}{z'} = \frac{x + yi}{x' + y'i} = \frac{z \times \bar{z}'}{z' \times \bar{z}'} = \frac{1}{z' \times \bar{z}'} \times z \times \bar{z}'$$

$$= \frac{1}{x'^2 + y'^2} \times (x + yi)(x' - y'i) = \frac{xx' + yy'}{x'^2 + y'^2} + \frac{yx' - xy'}{x'^2 + y'^2} i$$

Présentation géométrique d'un nombre complexe



Le plan (P) est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

- A tout nombre complexe $z = x + yi$ de $\mathbb{C}$ on lui associe le point $M(x, y)$ de (P) c.à.d. :
 $f: \mathbb{C} \rightarrow (P)$
 $z = x + yi \mapsto f(z) = f(x + yi) = M(x, y)$ (ou bien $\vec{OM} = x\vec{u} + y\vec{v}$)
- ❖ Dans ce cas :
 - Le plan (P) est appelé le plan complexe .
 - le point $M(x, y)$ est l'image du complexe $z = x + yi$.
 - on note $M_{(z)}$ ou $M_{(x+yi)}$ on lit le point M d'affixe z .de même pour le vecteur $\vec{OM}_{(z)}$.
 - on note aussi z_M on lit z est l'affixe de M . de même pour $z_{\vec{OM}}$.
 - Si $z = a \in \mathbb{R}$ alors M est sur l'axe des abscisses sera nommé axe réel .
 - Si $z = bi$, $(b \in \mathbb{R})$ alors M est sur l'axe des ordonnées sera nommé axe imaginaire .



Propriétés des affixes	$A(z_A) ; B(z_B) ; C(z_C)$ et $I(z_I)$ sont trois points du plan complexe (P) . ❖ Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$. ❖ Le vecteur $k\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $k(z_B - z_A)$. ❖ Le point I milieu de $[A,B]$ a pour affixe $z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$. ❖ $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$; ($k \in \mathbb{R}$) càd $z_C - z_A = k(z_B - z_A)$ ou bien $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = k \in \mathbb{R}$ d'où les points A et B et C sont alignés (avec $z_B - z_A \neq 0$)		
Conjugué de $z = x + yi$ et Propriétés		• $z' = x - yi$ est appelé le conjugué de z on note $z' = \bar{z} = x - yi$. • $z + \bar{z} = 2x = 2\text{Re}(z)$ et $z - \bar{z} = 2yi = 2\text{Im}(z)i$. • $\bar{\bar{z}} = z$ et $z \times \bar{z} = x^2 + y^2$ et $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$ et $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z'}$ • ($z' \neq 0$) ; $\left(\frac{1}{z'}\right) = \frac{1}{z'}$; $\left(\frac{z}{z'}\right) = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}$ et $\overline{z^p} = (\bar{z})^p$; $p \in \mathbb{Z}$ (avec $z \neq 0$ si $p \in \mathbb{Z}^-$)	
Module de $z = x + yi$	• Le nombre réel positif $\sqrt{zz} = \sqrt{x^2 + y^2}$ s'appelle le module de z sera noté $z = \sqrt{zz} = \sqrt{x^2 + y^2}$. • Interprétation géométrique du module de z : $z = \sqrt{x^2 + y^2} = \ \overrightarrow{OM}\$ avec M d'affixe $z = x + yi$. • D'où : $\ \overrightarrow{AB}\ = AB = z_B - z_A$. • $\left \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right = \frac{AB}{AC}$ donc si on a $\left \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right = \frac{AB}{AC} = 1$ alors le triangle ABC est isocèle en A .		
Propriétés du module	$ \bar{z} = -z = z = -\bar{z} $	$ z + z' \leq z + z' $	$ z = 0 \Leftrightarrow z = 0$
	$\left \frac{1}{z'}\right = \frac{1}{ z' }$; $\left \frac{z}{z'}\right = \frac{ z }{ z' }$ ($z' \neq 0$)	$ z \times z' = z \times z' $	$ z^p = z ^p$, $p \in \mathbb{Z}$ et $z \neq 0$
Argument d'un nombre complexe non nul	$M_{(z)}$ ($M_{(z)} \neq O$ donc $z \neq 0$) est un point du plan complexe (P) est muni d'un repère orthonormé direct $(0, \vec{u}, \vec{v})$. • Toute mesure α de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$ s'appelle argument du nombre complexe z on note : $\arg(z) \equiv \alpha [2\pi]$; d'où $\arg(z) \equiv (\vec{u}, \overrightarrow{OM}) [2\pi]$ ou $\arg(z) = \alpha + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$		
Remarque	• $z = a > 0$ alors $\arg(a) \equiv 0 [2\pi]$ et $z = a < 0$ alors $\arg(a) \equiv \pi [2\pi]$.		



	• $z = bi$; $b > 0$ alors $\arg(a) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ et $z = bi$; $b < 0$ alors $\arg(a) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$. • $\arg(-z) \equiv \pi + \arg(z) [2\pi]$ et $\arg(\bar{z}) \equiv -\arg(z) [2\pi]$ (sans oublier $z \neq 0$) .		
Propriétés des arguments	$\arg(z \times z') \equiv \arg z + \arg z' [2\pi]$		$p \in \mathbb{Z}$; $\arg(z^p) \equiv p \times \arg z [2\pi]$
	$\arg\left(\frac{1}{z'}\right) \equiv -\arg z' [2\pi]$		$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg z - \arg z' [2\pi]$
	Si $k > 0$ alors $\arg(kz) \equiv \arg(z) [2\pi]$		Si $k > 0$ alors $\arg(kz) \equiv \pi + \arg(z) [2\pi]$
« écriture trigonométrique (forme trigonométrique) D'un nombre complexe non nul	$z = x + yi \in \mathbb{C}^*$; ($z \neq 0$) tel que $\arg(z) \equiv \alpha [2\pi]$; $z = r$. Le nombre complexe z s'écrit de la forme suivante : $z = z (\cos \alpha + i \sin \alpha)$ ou $z = \sqrt{x^2 + y^2}(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ ou $z = [z , \arg(z)]$ ou $z = [r, \alpha]$ chaque écriture s'appelle écriture trigonométrique ou forme trigonométrique du nombre complexe non nul z		
Remarque	$z = a > 0$ alors $z = [a, 0]$, $z = a < 0$ alors $z = [-a, \pi]$ $z = bi$; $b > 0$ alors $[b, \frac{\pi}{2}]$, $z = bi$; $b < 0$ alors $[b, -\frac{\pi}{2}]$		
Operations sur les formes trigonométriques	Abraham de Moivre en 1736 	Les operations	$z = [r, \alpha] = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$, $z' = [r', \alpha'] = r'(\cos \alpha' + i \sin \alpha')$
		Produit : $z \times z'$	$z \times z' = [r, \alpha] \times [r', \alpha'] = [r \times r', \alpha + \alpha']$ ou $zz' = r(\cos \alpha + i \sin \alpha) \times r'(\cos \alpha' + i \sin \alpha')$ $= rr'(\cos(\alpha + \alpha') + i \sin(\alpha + \alpha'))$
		Produit : $\underbrace{z \times z \times \dots \times z}_{n \text{ fois}} = z^n$ Formule de MOIVRE	$z^n = [r, \alpha]^n = [r^n, n\alpha]$ $z^n = (r(\cos \alpha + i \sin \alpha))^n = r^n(\cos n\alpha + i \sin n\alpha)$ Cas particulier $r = 1$: $[1, \alpha]^n = [1^n, n\alpha] = [1, n\alpha]$ ou encore $(\cos \alpha + i \sin \alpha)^n = (\cos n\alpha + i \sin n\alpha)$ formule de MOIVRE
		Inverse	$\frac{1}{z'} = \frac{1}{[r', \alpha']} = [r', -\alpha']$ ou $\frac{1}{z'} = \frac{1}{r'(\cos \alpha' + i \sin \alpha')} = \frac{1}{r'}(\cos(-\alpha') + i \sin(-\alpha'))$
		Quotient	$\frac{z}{z'} = \frac{[r, \alpha]}{[r', \alpha']} = \left[\frac{r}{r'}, \alpha - \alpha'\right]$ ou $\frac{z}{z'} = \frac{r(\cos \alpha + i \sin \alpha)}{r'(\cos \alpha' + i \sin \alpha')} = \frac{r}{r'}(\cos(\alpha - \alpha') + i \sin(\alpha - \alpha'))$



Notation exponentielle ou écriture exponentielle D'un nombre complexe non nul

- L'écriture trigonométrique de $z = [r, \alpha] = [|z|, \arg z]$ sera notée de la manière suivante $z = [r, \alpha] = r(\cos \alpha + i \sin \alpha) = re^{i\alpha}$
- $z = re^{i\alpha}$ s'appelle l'écriture exponentielle ou la forme exponentielle de z non nul
- propriétés : $(e^{i\alpha})^n = e^{in\alpha}$; $\frac{e^{i\alpha}}{e^{i\beta}} = e^{i(\alpha-\beta)}$; $\frac{1}{e^{i\beta}} = e^{-i\beta}$; $e^{i\alpha} \times e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)}$ avec α et β de $\mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$.

Formules d' EULER

Leonhard EULER
(Bâle 1707, Saint-Petersbourg 1783)



La notation i fut introduite par Euler, le grand mathématicien suisse. Dans ce livre, on notera j à la place de i , notation utilisée pour l'intensité en électricité.

$\alpha \in \mathbb{R}$ on pose $z = [r, \alpha] = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ on a :

$$\begin{cases} \cos \alpha = \frac{z + \bar{z}}{2} = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2} \\ \sin \alpha = \frac{z - \bar{z}}{2i} = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i} \end{cases} \quad \text{on les appelle formules d' EULER}$$

Remarque : avec $z = \cos \alpha + i \sin \alpha = e^{i\alpha}$

- $e^{in\alpha} + e^{-in\alpha} = z^n + (\bar{z})^n = 2 \cos n\alpha$
- $e^{in\alpha} - e^{-in\alpha} = z^n - (\bar{z})^n = 2i \sin n\alpha$.
- $e^{in\alpha} \times e^{-in\alpha} = z^n \times (\bar{z})^n = 1$

Equation du deuxième degré de la forme $z \in \mathbb{C} / z^2 = a$

$a = 0$ alors $S = \{0\}$

$a > 0$ alors $S = \{\sqrt{a}, -\sqrt{a}\}$

$a < 0$ alors $S = \{i\sqrt{-a}, -i\sqrt{-a}\}$

Equation du 2^{ème} degré de la forme $z \in \mathbb{C} / az^2 + bz + c = 0$; $a \in \mathbb{R}^*$ $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$ avec $\Delta = b^2 - 4ac$

• $\Delta = 0$ donc $S = \left\{ \frac{-b}{2a} \right\}$

• $\Delta > 0$ donc deux solutions réelles : $z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$.

• $\Delta < 0$ donc deux solutions complexes conjuguées : $z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

Remarques: factorisation de $az^2 + bz + c$

- $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$ et $z_1 \times z_2 = \frac{c}{a}$.
- $\Delta \neq 0$ alors $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$.
- $\Delta = 0$ alors $az^2 + bz + c = a(z - z_1)^2$

Ecriture complexe des transformations (noté T ou bien f): translation – homothétie - rotation

Transformation f dans le plan complexe qui transforme le point $M_{(z)}$ au point $M'_{(z')}$

$f : (P) \rightarrow (P)$

C'est-à-dire

$M_{(z)} \mapsto f(M_{(z)}) = M'_{(z')}$

On donne T ou bien f Donc il faut déterminer



la nature de T ou bien f et Ses éléments caractéristiques

Rappel Transformation est :	Ecriture complexe	Transformation donnée de la forme f transforme le point $M_{(z)}$ au point $M'_{(z')}$ avec $z' = az + b$; ($a, b \in \mathbb{C}$) Le programme se limite à trois cas (les valeurs de a)
Translation : $f = t_{\vec{u}}$ $f(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u}$	$z' - z = b$ ou bien $z' = z + b$	1 ^{er} cas $a = 1$ on a : $z' = z + b$ Nature de la transformation : f est une Translation Eléments caractéristiques : • b est l'affixe du vecteur $\vec{u}$ de la translation f .
Homothétie : $f = h(\Omega, k)$ Ω centre de l'homothétie k rapport de l'homothétie définition : $f(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = k \overrightarrow{\Omega M}$	$z' - \omega = k(z - \omega)$ ou bien $z' = kz + b$ ($b = \omega - k\omega \in \mathbb{C}$)	2 ^{ème} cas $a = k \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$ on a : $z' = kz + b$ Nature de la transformation f : f est une Homothétie Eléments caractéristiques : • k rapport de l'homothétie f • $\omega = \frac{b}{1-k} = \frac{b}{1-a}$ est l'affixe du centre Ω de l'homothétie f • Remarque : Ω est invariant par f donc $f(\Omega) = \Omega$ D'où : $z' = kz + b \Leftrightarrow \omega = k\omega + b$ donc $\omega = \frac{b}{1-k}$
Rotation : $f = r(\Omega, \alpha)$ Ω centre de l'homothétie α angle de rotation définition : $f(M) = M' \Leftrightarrow$ $\begin{cases} \overrightarrow{\Omega M'} = \overrightarrow{\Omega M} \\ \left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'} \right) \equiv \alpha \pmod{2\pi} \end{cases}$	$z' - \omega = (z - \omega)e^{i\alpha}$ ou bien $z' = e^{i\alpha}z + b$ ($b = \omega - \omega e^{i\alpha}$)	3 ^{ème} cas $ a = 1$ on a : $z' = e^{i\alpha}z + b$ ou $z' = az + b = (\cos \alpha + i \sin \alpha)z + b$ ou $z' = (x + yi)z + b$; (avec $ x + yi = 1$) Nature de la transformation f : f est une Rotation Eléments caractéristiques : • α ou $\arg(x + yi)$ est l'angle de la rotation . • Ou $\omega = \frac{b}{1-a} = \frac{b}{1-e^{i\theta}} = \frac{b}{1-(\cos \alpha + i \sin \alpha)} = \frac{b}{1-(x + yi)}$ $\omega = \frac{b}{1-a} = \frac{b}{1-e^{i\theta}}$ est l'affixe du centre Ω de la rotation f • Remarque : ❖ Ω est invariant par f donc $f(\Omega) = \Omega$ D'où : $z' = az + b \Leftrightarrow \omega = k\omega + b$ donc $\omega = \frac{b}{1-a}$. ❖ De même : $\alpha \equiv \arg\left(\frac{z' - \omega}{z - \omega}\right) \pmod{2\pi}$



la géométrie et Les nombres complexes

A et B et C et D et I cinq points du plan complexe tel que leurs affixes sont z_A et z_B et z_C et z_D et z_I

• $\|\vec{AB}\| = AB = |z_B - z_A|$

• $z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$ affixe de I milieu de $[AB]$

Mesure de $(\vec{u}, \vec{AB})$ est :

$(\vec{u}, \vec{AB}) \equiv \arg(z_B - z_A) [2\pi]$

$\vec{AC} = k\vec{AB} \Leftrightarrow z_C - z_A = k(z_B - z_A)$

$\Leftrightarrow \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = k \in \mathbb{R} \quad ; (A \neq B)$

Mesure de $(\vec{AB}, \vec{CD})$ est :

$(\vec{AB}, \vec{CD}) \equiv \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) [2\pi]$

A et B et C sont alignés équivaut à : $(\arg(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}) \equiv \pi [2\pi] \text{ ou } \arg(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}) \equiv 0 [2\pi])$

$\arg(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}) \equiv 0 [2\pi]$

Remarque : $(\arg(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}) \equiv 0 [2\pi] \text{ ou } \arg(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}) \equiv \pi [2\pi])$

équivaut à $\arg(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}) \equiv 0 [\pi]$

z_u et z_v affixes des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ on a

$(\vec{u}, \vec{v}) \equiv \arg(z_u) - \arg(z_v) [2\pi]$

ou

$(\vec{u}, \vec{v}) \equiv \arg\left(\frac{z_v}{z_u}\right) [2\pi]$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires équivaut $\frac{z_v}{z_u} \in \mathbb{R} \quad (z_v \neq 0)$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux équivaut $\Leftrightarrow \frac{z_v}{z_u} = bi ; (b \in \mathbb{R}^*) \quad (z_v \neq 0)$

$\Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_v}{z_u}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$

A et B et C et D sont alignés ou cocycliques équivaut à

$\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} \times \frac{z_B - z_C}{z_D - z_C} \in \mathbb{R}$

$(AB) // (CD) \Leftrightarrow \arg(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}) \equiv \pi [2\pi] \text{ ou } \arg(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}) \equiv 0 [2\pi]$

$\Leftrightarrow \arg(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}) \equiv 0 [\pi]$

$(AB) \perp (CD) \Leftrightarrow (\vec{AB}, \vec{CD}) \equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$

$\Leftrightarrow \arg(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}) \equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$

Relation complexe

Signification géométrique

L'ensemble des M d'affixe z tel que : $|z - z_A| = |z - z_B|$

1. $AM = BM$. M appartient à la médiatrice du segment $[AB]$.
2. L'ensemble des M c'est la médiatrice du segment $[AB]$.

$|z - z_A| = k \quad (k > 0)$

1. $AM = k$
2. M appartient au cercle de centre A et de rayon k .

$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \left[r; \pm \frac{\pi}{2} \right] = re^{\pm \frac{\pi}{2} i}$

- Si $r \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$ alors ABC est un triangle rectangle en A .
- Si $r = 1$ alors ABC est un triangle rectangle et isocèle en A .

$\left| \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right| = 1$

alors ABC est un triangle isocèle en A .

$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \left[1; \pm \frac{\pi}{3} \right] = e^{\pm \frac{\pi}{3} i}$

alors ABC est un triangle équilatéral .