1 Fonction logarithme népérien

Définition

La fonction logarithme népérien on note **ln** est la primitive de la fonction $x \to \frac{1}{x}$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$ qui s'annule en 1.

Résultats:

♠ $x \to \mathbf{ln}(x)$ est défini et continue sur l'intervalle $]0;+\infty[$

♠ $x \to \mathbf{ln}(x)$ est dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$; et on a $\forall x \in]0;+\infty[\ ;\ (ln(x))' = \frac{1}{x}$

♠ $x \to \mathbf{ln}(x)$ est strictement croissante sur l'intervalle $]0;+\infty[$ car $\forall x \in]0;+\infty[; \frac{1}{x} > 0$

♠ Signe de la fonction **ln**:

$* \ ln(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ $\quad * \ ln(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$ $\quad * \ ln(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$

x	0		1		$+\infty$
$ln(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

propriétés

$$(\forall a > 0) ; (b > 0) ; (r \in \mathbb{Q}^*))$$

$* \ ln(a \times b) = ln(a) + ln(b)$

$* \ ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \times ln(a)$

$* \ ln\left(\frac{a}{b}\right) = ln(a) - ln(b)$

$* \ ln(a^r) = r \times ln(a)$

$$(\forall xy > 0)$$

$* \ ln(x \times y) = ln(|x|) + ln(|y|)$

$* \ ln\left(\frac{x}{y}\right) = ln(|x|) - ln(|y|)$

$$(\forall x > 0) ; (\forall y > 0))$$

$* \ ln(x) = ln(y) \Leftrightarrow x = y$

$* \ ln(x) < ln(y) \Leftrightarrow x < y$

2 Étude de la fonction ln.

2.1 Limites usuelles et Les Branches infinies

propriétés

♣ $\lim\limits_{x\to 0^+} ln(x) = -\infty$ Donc $\begin{cases}\text{l'axe des ordonnées est une asymptote verticale}\\ \text{à la courbe de la fonction } \mathbf{ln}\end{cases}$

♣ On a $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} ln(x) = +\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{ln(x)}{x} = +\infty\end{array}\right\}$ Donc $\begin{cases}\text{la courbe de la fonction } \mathbf{ln} \text{ admet une}\\ \text{branche parabolique de direction l'axe}\\ \text{des abscisses au voisinage de } +\infty\end{cases}$

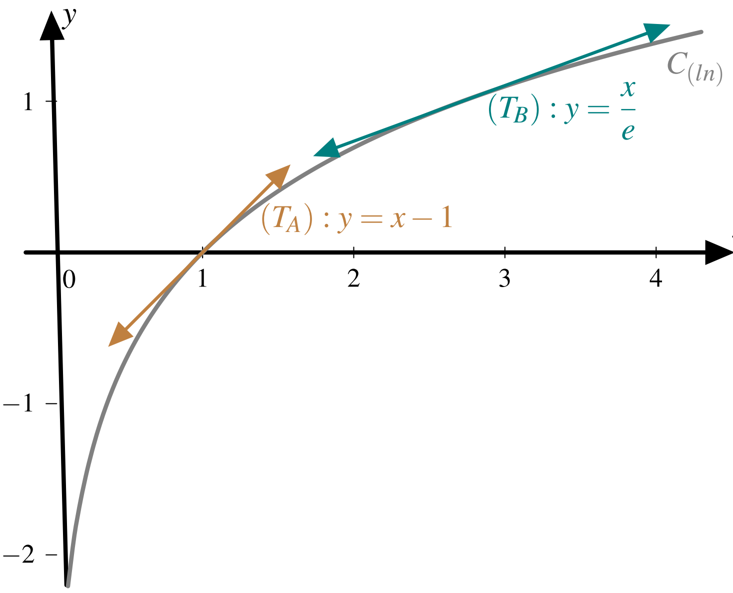
$*$ $\lim\limits_{x\to 0^+} xln(x) = 0$ $\quad *$ $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{ln(x)}{x-1} = 1$ $\quad *$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{ln(1+x)}{x} = 1$

$*$ $\lim\limits_{x\to 0^+} x^n ln(x) = 0 \;;\; (n\in\mathbb{N}^* - \{1\})$ $\quad *$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{ln(x)}{x^n} = 0 \;;\; (n\in\mathbb{N}^* - \{1\})$

2.2 Tableau de variation de la fonction ln.

x	0		1		$+\infty$
$(ln(x))'$	‖		$+$		
$ln(x)$	‖ $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

2.3 Construction de la courbe de fonction ln.



Conséquences

♠ La tangente (T_A) à la courbe de la fonction ln au point $A(1;0)$ a pour équation: $y = x - 1$

♠ La tangente (T_B) à la courbe de la fonction ln au point $B(e;1)$ a pour équation: $y = \dfrac{1}{e}x$

2.4 Dérivée de la fonction logarithmique

Propriété:1

Si g est une fonction numérique dérivable sur un intervalle I et $((\forall x \in I); g(x) \neq 0)$, alors la fonction $f : x \mapsto ln|g(x)|$ est dérivable sur I et on a : $\left((\forall x \in I); ln(|g(x)|)' = \dfrac{g(x)'}{g(x)}\right)$

Propriété:2

Si g est une fonction numérique dérivable sur un intervalle I et $((\forall x \in I); g(x) \neq 0)$,
Les primitives de la fonction :$x \mapsto \dfrac{g(x)'}{g(x)}$ sont les fonction $x \mapsto \ln|g(x)| + k$ où $k \in \mathbb{R}$

2.5 Fonction logarithmique de base a $(a > 0 \ et \ a \neq 1)$

Définition

La fonction logarithme de base a noté log_a est définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par:
$\log_a(x) = \dfrac{ln(x)}{ln(a)}$

Conséquences

- $log_a(a) = 1$
- $log_a(e) = \dfrac{1}{ln(a)}$
- $log_a(1) = 0$
- $((\forall x \in]0; +\infty[); log_e(x) = ln(x))$

Propriétés

$(\forall x; y \in]0; +\infty[)$ **et** $(a > 0 \ et \ a \neq 1)$ On a:

- $*$ $log_a(x \times y) = log_a(x) + log_a(y)$
- $*$ $log_a\left(\dfrac{1}{x}\right) = -log_a(x)$
- $*$ $log_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = log_a(x) - log_a(y)$
- $*$ $log_a(x^r) = r \times log_a(x)$