Primitives d'une fonction

1) Définition.

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On appelle fonction **primitive**, ou primitive de f sur I, toute fonction F définie et **dérivable** sur I telle que :

$$(\forall x \in I)\ ;\quad F'(x) = f(x)$$

2) Propriétés.

Propriété1 : Toute fonction **continue** (dérivable) sur un intervalle I admet une primitive sur I.

Propriété2: Soit F une primitive de f sur un intervalle I.

- L'ensemble des primitives de f sur l'intervalle I est l'ensemble des fonctions définies sur I par: $x \mapsto F(x)+k \quad avec \quad k \in IR$.
- En particulier, si $a \in I$ et $b \in IR$, alors il existe une unique primitive de f sur I telle que: $f(a)=b$.

Propriété3: Soit F une primitive de f sur un intervalle I alors G est une autre primitive de f sur l' intervalle I si et seulement si : $G(x) = F(x) + k$, où $k \in IR$.

3) Propriétés de calculs sur les primitives.

Primitives des fonctions usuelles	
$f(x)$	$F(x)$
k	$k.x+c$
x^n	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+c$
$x^r \ /\left(r \in \mathbb{Q}-\{0;-1\}\right)$	$\dfrac{x^{r+1}}{r+1}+c$
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}+c$
$\sin x$	$-\cos x+c$
$\cos x$	$\sin x+c$
$1+\tan^2 x$	$\tan x+c$

- Soient u et v deux fonctions dérivables sur I. - U et V des primitives de u et v sur I	
$f(x)$	$F(x)$
$u(x)+v(x)$	$U(x)+V(x)+c$
$\lambda.u(x)$	$\lambda.U(x)+c$
$u' \times u$	$\dfrac{1}{2}u^2+c$
$\dfrac{u'(x)}{\sqrt[n]{u(x)}}$	$n.\sqrt[n]{u(x)}+c$
$u' \times u^r \ /\left(r \in \mathbb{Q}-\{0;-1\}\right)$	$\dfrac{u^{r+1}}{r+1}+c$

EXERCICES ET PROBLÈMES

Exercice 1:

Déterminer l'ensemble des primitives de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle I.

1) $f : x \mapsto x^3 - 2x^2 + 3x - 5$ sur $I=IR$.
2) $f : x \mapsto \dfrac{3}{x^2}$ sur $I=[1\ ;+\infty[$.
3) $f : x \mapsto \dfrac{2}{\sqrt{x}}$ sur $I= [1\ ;+\infty[$.
4) $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ sur $I=]0\ ;+\infty[$.
5) $g : x \mapsto 3x^2 \times (x^3 - 1)^2$ sur $I= IR$.
6) $h : x \mapsto \dfrac{2x}{(x^2-3)^3}$ sur $I= [4\ ;+\infty[$.
7) $g : x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ sur $I=IR$.
8) $f : x \mapsto \dfrac{3x}{\sqrt{x^2+4}}$ sur $I=IR$.
9) $f : x \mapsto \tan^2(x)$ sur $I=IR$.
10) $f : x \mapsto x^2(2x-1)$ sur $I=IR$.

Exercice2:

Soit $f : x \mapsto \dfrac{x^3-3x^2+7}{(x-2)^2}$ définie sur $I=[3,+\infty[$..

1) Déterminer a, b et c de façon que :
$$f(x) = ax+b+\frac{c}{(x-2)^2}$$
2) Calculer les primitives de f sur $I=[3,+\infty[$.
3) En déduire la primitive F de f sachant que $F(3)=\dfrac{11}{2}$.

Exercice3:

1) Déterminer les primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{1+\cos 2x}$ sur l'intervalle $\left[0\ ;\dfrac{\pi}{4}\right]$.
2) Déterminer la primitive F de $f : x \mapsto x^3(x^4-1)$ tel que $F(0)=-1$.
3) Déterminer a, b et c de façon que : $F(x)=(ax^2+bx+c)\sqrt{3-2x}$ soit une primitive de la fonction $f : x \mapsto x\sqrt{3-2x}$.

Every one thinks of changing the world , but no one thinks of changing himself.