TD : **Exercices d'applications et de réflexion avec solutions**

PROF: ATMANI NAJIB 2BAC BIOF

TD avec solutions : FONCTIONS PRIMITIVES

Exercice1 : Soit la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=2x^2+x+1+\frac{1}{x^2}$

1)Déterminer les fonctions primitives de la fonction f sur $]0;+\infty[$

2)Déterminer la fonction primitive de la fonction f sur $]0;+\infty[$ tel que : $F(1)=3$

Solution :1) $f(x)=2x^2+x+1+\frac{1}{x^2}$

Donc : $F(x)=2\times\frac{1}{3}x^{2+1}+\frac{1}{2}x^{1+1}+1x-\frac{1}{x^2}+k$

Donc : $F(x)=\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x-\frac{1}{x}+k$ avec $k\in\mathbb{R}$

2) $F(1)=3\Leftrightarrow\frac{2}{3}\times1^3+\frac{1}{2}\times1^2+1-\frac{1}{1}+k=3$

$F(1)=3\Leftrightarrow\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+1-1+k=3\Leftrightarrow\frac{7}{6}+k=3\Leftrightarrow k=\frac{11}{6}$

Donc : la fonction primitive de la fonction f sur $]0;+\infty[$ tel que : $F(1)=3$ est :

$F(x)=\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x-\frac{1}{x}+\frac{11}{6}$

Exercice2 : (situation directe): Déterminer une fonction primitive des fonctions suivantes :

1) $f(x)=5x^4+3x+1$ 2) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}+\cos x+\sin x-1$

3) $f(x)=\sin x+x\cos x$ 4) $f(x)=(2x-1)^3$

5) $f(x)=\frac{x}{(x^2-1)^2}$ 6) $f(x)=5x\sqrt[3]{3x^2+1}$

7) $f(x)=\frac{4x+1}{(2x^2+x)^4}$ 8) $f(x)=7x\cos(\pi x^2+3)$

Solutions : 1) $f(x)=5x^4+3x+1$

$F(x)=5\times\frac{1}{5}x^5+3\times\frac{1}{2}x^2+1x+k$ avec $k\in\mathbb{R}$

2) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}+\cos x+\sin x-1$

$F(x)=2\sqrt{x}+\sin x-\cos x-x+k$ avec $k\in\mathbb{R}$

3) $f(x)=\sin x+x\cos x=x'\sin x+x(\sin x)'$

Donc : $F(x)=x\times\sin x+k$ avec $k\in\mathbb{R}$

4) $f(x)=(2x-1)^3=\frac{1}{2}(2x-1)'(2x-1)^3$

$F(x)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3+1}(2x-1)^{3+1}+k$ avec $k\in\mathbb{R}$

$F(x)=\frac{1}{8}(2x-1)^4+k$ avec $k\in\mathbb{R}$

5) $f(x)=-\frac{x}{(x^2-1)^2}$

on doit remarquer que : $f(x)=-\frac{(x^2-1)'}{(x^2-1)^2}$

et par suite : $F(x)=\frac{1}{x^2-1}+k$ avec $k\in\mathbb{R}$

6) $f(x)=5x\sqrt[3]{3x^2+1}$ On doit remarquer que :

la fonction $u(x)=3x^2+1$ donne $u'(x)=6x$ et par suite : $f(x)=\frac{5}{6}u'(x)\sqrt[3]{u(x)}$ on utilisant le tableau on a :

(c'est de la forme : $u'\sqrt[n]{u}$ (n = 3))

Donc les fonctions primitives de f s'écrivent sous la forme : $F(x)=\frac{5}{6}\frac{3}{4}\sqrt[3]{u^4(x)}+k$

$F(x)=\frac{5}{8}\sqrt[3]{(3x^2+1)^4}+k$ avec $k\in\mathbb{R}$

7) Déterminons une fonction primitive de :

$f(x)=\frac{4x+1}{\left(2x^2+x\right)^4}$ On doit remarquer que :

la fonction $u(x)=2x^2+x$ donne $u'(x)=4x+1$

et par suite : $f(x)=\frac{u'(x)}{u^4(x)}=u'(x)u^{-4}(x)$

on utilisant le tableau on a :

(c'est de la forme : $u'u^n$ (n = -4))

Donc les fonctions primitives de f s'écrivent sous la forme : $F(x)=\frac{1}{-4+1}u^{-4+1}(x)+k$

$$F(x)=-\frac{1}{3}\left(2x^2+x\right)^{-3}+k=-\frac{1}{3}\frac{1}{\left(2x^2+x\right)^3}+k$$

8) $f(x)=7x\cos\left(\pi x^2+3\right)$

On doit remarquer que :

la fonction $u(x)=\pi x^2+3$ donne $u'(x)=2\pi x$

et par suite : $f(x)=\frac{7}{2\pi}u'(x)\cos\left(u(x)\right)$

(c'est de la forme : $u'\times\left(v'\circ u\right)$)

Donc les fonctions primitives de f s'écrivent sous la forme : $F(x)=\frac{7}{2\pi}\sin\left(\pi x^2+3\right)+k$ avec $k\in\mathbb{R}$

Exercice3 : Déterminer une fonction primitive de fonctions suivante : $f(x)=\frac{2}{4x^2+4x+1}$

Solutions : A remarquer que

$f(x)=\frac{6}{(2x+1)^2}=(-3)\left(-\frac{(2x+1)'}{(2x+1)^2}\right)$ (C'est de la forme: $-\frac{u'}{u^2}$)

Donc les fonctions primitives de la fonction f sont les fonctions : $F(x)=\frac{-3}{2x+1}+k$ avec $k\in\mathbb{R}$

Remarque : On peut utiliser cette méthode pour toutes les fonctions de la formes :

$f(x)=\frac{\alpha}{ax^2+bx+c}$ où le discriminant Δ est nul

Exercice4 : Soit la fonction f définie par :
$f(x) = 2x + 1$ si $x \le 1$
$f(x) = 2x - 1$ si $x > 1$
Montrer que la fonction f n'admet pas de primitive Sur $\mathbb{R}$

Solution : On remarque que f n'est pas continue sur $\mathbb{R}$; (elle n'est pas continue en 1)

en effet : $f(1)=3$ et $\lim_{x\to1^+} f(x)=1\neq f(1)$

$F_1(x)=x^2+x+k_1$ est une fonction primitive de la fonction f sur $]-\infty, 1]$.

$F_2(x)=x^2-x+k_2$ est une fonction primitive de la fonction f sur $]1, +\infty[$.

Si f admet une primitive F sur $\mathbb{R}$ alors ils existent k_1 et k_2 tels que :

$$\begin{cases} F_1(x)=x^2+x+k_1; si...x\le 1 \\ F_2(x)=x^2-x+k_2; si...x\succ 1 \end{cases}$$

et que F soit dérivable sur $\mathbb{R}$ et que :

$(\forall x\in\mathbb{R}); F'(x)=f(x)$

On a F est dérivable sur$]-\infty, 1[$
et $(\forall x \in]-\infty, 1[)(F'(x) = f(x))$
et F est dérivable sur $]1, +\infty[$
et $(\forall x \in]1, +\infty[)(F'(x) = f(x))$
Le problème il faut déterminer (s'ils existent) k_1 et k_2 dans $\mathbb{R}$ pour que F soit dérivable en 1 et que : $F'(1) = f(1) = 3$.

On a $F(1)=2+k_1$

D'autre part pour que f soit dérivable en 1, il faut qu'elle soit continue en 1, ce qui implique

$\lim_{x\to1^+}F(x)=\lim_{x\to1^-}F(x)=F(1)$

On en déduit que $2+k_1=k_2$ d'autre part :

$$\lim_{x\to1^+}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{x^2-x+k_2-2-k_1}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-x-2+k_2-k_1}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-x-2+2+k_1-k_1}{x-1}$$

Car : $2+k_1=k_2$

$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-x}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} x = 1 = F'_d(1)$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{F(x)-F(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2+x+k_1-2-k_1}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-x-2}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{(x-1)(x+2)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} x+2 = 3 = F'_g(1)$$

Donc pour tous réels k_1 et k_2 ; $F'_d(1) \neq F'_g(1)$

D'où F n'existe pas et par suite f n'admet pas de primitive sur $\mathbb{R}$

Exercice5 : Déterminer les fonctions primitives des fonctions :1) $f(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt[3]{2+\cos x}}$

2) $f(x) = 2x\sin x + x^2\cos x$ 3) $f(x) = (4x+5)^2$

4) $f(x) = 2\sqrt{2x+1}$ 5) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

6) $f(x) = x\sqrt{x^2+1}$ 7) $f(x) = \tan^2 x$

8) $f(x) = \cos^4 x$ (utiliser : cos^2x =(1+$cos2x$)/2))

9) $f(x) = \sin^3 x$ (Remarquer que : $sin^3\ x = sinx\ sin^2x$)

Solutions : 1)

$$f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt[3]{2+\cos x}} = -(2+\cos x)'(2+\cos x)^{-\frac{1}{3}}$$

(c'est de la forme : $u'u^n$)

Donc les fonctions primitives de f s'écrivent sous la forme :

$$F(x) = -\frac{1}{-\frac{1}{3}+1}(2+\cos x)^{-\frac{1}{3}+1} + k = -\frac{3}{2}(2+\cos x)^{\frac{2}{3}} + k$$

$$F(x) = -\frac{3}{2}\sqrt[3]{(2+\cos x)^2} + k \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}$$

2) $f(x) = 2x\sin x + x^2\cos x = (x^2)'\sin x + x^2(\sin x)'$

Donc : $F(x) = x^2 \times \sin x + k$ avec $k \in \mathbb{R}$

3) $f(x) = (4x+5)^2 = \dfrac{1}{4}(4x+5)'(4x+5)^2$

$$F(x) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2+1}(4x+5)^{2+1} + k$$

$$F(x) = \frac{1}{12}(4x+5)^3 + k \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}$$

4) $f(x) = 2\sqrt{2x+1} = (2x+1)'(2x+1)^{\frac{1}{2}}$

Donc : $F(x) = \dfrac{1}{\frac{1}{2}+1}(2x+1)^{\frac{1}{2}+1} = \dfrac{2}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}}$

$$F(x) = \frac{2}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\left(\sqrt{2x+1}\right)^3 + k$$

5) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{(x^2+1)'}{2\sqrt{x^2+1}}$

$$F(x) = \sqrt{x^2+1} + k \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}$$

6) $f(x) = x\sqrt{x^2+1} = \dfrac{1}{2}(x^2+1)'(x^2+1)^{\frac{1}{2}}$

$$F(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{\frac{1}{2}+1}(x^2+1)^{\frac{1}{2}+1} + k = \frac{1}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}} + k$$

$$F(x) = \frac{1}{3}\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3 + k \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}$$

7) $f(x) = \tan^2 x = (1+\tan^2 x) - 1$

$$F(x) = \tan x - x + k \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}$$

8) $f(x) = \cos^4 x = (\cos^2 x)^2 = \left(\dfrac{1+\cos 2x}{2}\right)^2$)

$$f(x) = \frac{1}{4}(1+2\cos 2x + \cos^2 2x) = \frac{1}{4}\left(1+2\cos 2x + \frac{1+\cos 4x}{2}\right)$$

$$f(x) = \frac{1}{8}(3+4\cos 2x+\cos 4x) = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x$$

$$F(x) = \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + k \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}$$

9) $f(x) = \sin^3 x = \sin x \times \sin^2 x = \sin x \times (1-\cos^2 x)$

$$f(x) = \sin x - \sin x \times \cos^2 x = \sin x + (\cos x)' \times \cos^2 x$$

$$F(x) = -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + k \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}$$

Exercice6: Soit la fonction f définie sur $[0;+\infty[$

par : $f(x) = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$ 1)Déterminer les réels a et b

tels que : $f(x) = a + \frac{b}{(x+1)^2} \qquad \forall x \in [0;+\infty[$

2)Déterminer la fonction primitive F de la fonction f sur $[0;+\infty[$ tel que : $F(1) = \frac{5}{2}$

Solution :1)

$$f(x) = a + \frac{b}{(x+1)^2} = \frac{a(x+1)^2 + b}{(x+1)^2} = \frac{ax^2 + 2ax + a + b}{(x+1)^2}$$

Donc : $\begin{cases} a = 1 \\ 2a = 2 \\ a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$ donc : $f(x) = 1 - \frac{1}{(x+1)^2}$

2) $f(x) = 1 - \frac{(x+1)'}{(x+1)^2}$ Donc : $F(x) = x + \frac{1}{x+1} + k$

$k \in \mathbb{R} \quad \forall x \in [0;+\infty[$

Exercice7: Soit la fonction f définie sur $[1;+\infty[$

par : $f(x) = x\sqrt{x-1}$

1)montrer que : $f(x) = \sqrt{(x-1)^3} + \sqrt{x-1} \quad \forall x \in [1;+\infty[$

2)Déterminer la fonction primitive F de la fonction f sur $[1;+\infty[$ tel que : $F(2) = 1$

Solution :1) $\forall x \in [1;+\infty[$

$$\sqrt{(x-1)^3} + \sqrt{x-1} = \sqrt{(x-1)^2} \times \sqrt{x-1} + \sqrt{x-1} = |x-1| \times \sqrt{x-1} + \sqrt{x-1}$$

On a : $x \in [1;+\infty[$ donc : $x \geq 1$ donc : $x - 1 \geq 0$

donc :

$$\sqrt{(x-1)^3} + \sqrt{x-1} = (x-1)\times\sqrt{x-1} + \sqrt{x-1} = x\sqrt{x-1} - 1\sqrt{x-1} + \sqrt{x-1} = x\sqrt{x-1}$$

2) $f(x) = \sqrt{(x-1)^3} + \sqrt{x-1} \; \forall x \in [1;+\infty[$

$$f(x) = \left((x-1)^3\right)^{\frac{1}{2}} + (x-1)^{\frac{1}{2}} = (x-1)^{\frac{3}{2}} + (x-1)^{\frac{1}{2}}$$

$$f(x) = (x-1)'(x-1)^{\frac{3}{2}} + (x-1)'(x-1)^{\frac{1}{2}}$$

Donc : $F(x) = \frac{1}{\frac{3}{2}+1}(x-1)^{\frac{3}{2}+1} + \frac{1}{\frac{1}{2}+1}(x-1)^{\frac{1}{2}+1} + k$

$$F(x) = \frac{2}{5}(x-1)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} + k$$

$$F(x) = \frac{2}{5}\left(\sqrt{x-1}\right)^5 + \frac{2}{3}\left(\sqrt{x-1}\right)^3 + k \qquad k \in \mathbb{R}$$

Exercice8: Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = \frac{5x^4 + 40x^2 + 20x + 80}{(x^2+4)^2}$ 1)Déterminer les réels

a et b et c tels que : $f(x) = \frac{ax+b}{(x^2+4)^2} + c \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

2)Déterminer la fonctions primitives F de la fonction f sur $\mathbb{R}$ tel que : $F(0) = c$

Solution :1)

$$f(x) = \frac{ax+b}{(x^2+4)^2} + c = \frac{ax + b + c(x^2+4)^2}{(x^2+4)^2} = \frac{ax + b + cx^4 + 8cx^2 + 16c}{(x^2+4)^2}$$

$f(x) = \frac{cx^4 + 8cx^2 + ax + (b+16c)}{(x^2+4)^2}$ donc :

$\begin{cases} c = 5 \\ 8c = 40 \\ a = 20 \\ b + 16c = 80 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 5 \\ c = 5 \\ a = 20 \\ b = 0 \end{cases}$ donc : $f(x) = \frac{20x}{(x^2+4)^2} + 5$

2) $f(x) = \frac{20x}{(x^2+4)^2} + 5 \Leftrightarrow f(x) = 10\frac{(x^2+4)'}{(x^2+4)^2} + 5$

Donc : $F(x) = -\frac{10}{x^2+4} + 5x + k \qquad k \in \mathbb{R}$

$$F(0) = 5 \Leftrightarrow -\frac{10}{4} + k = 5 \Leftrightarrow k = \frac{15}{2}$$

$$F(x) = -\frac{10}{x^2+4} + 5x + \frac{15}{2} \; \forall x \in \mathbb{R}$$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron

Dit un proverbe. C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices

que l'on devient un mathématicien