

Les fonctions primitives

Prof. Smail BOUGUERCH

Les fonctions primitives d'une fonction continue sur un intervalle:

Définition:

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I
On dit que F est une fonction primitive de f sur l'intervalle I
Si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- F est dérivable sur l'intervalle I
- $(\forall x \in I); F'(x) = f(x)$

Propriétés:

Toute fonction continue sur un intervalle admet une primitive sur cet intervalle

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I
Si F est une fonction primitive de f sur l'intervalle I , alors toutes les fonctions primitives de f sont définies sur l'intervalle I comme suit :

$$x \mapsto F(x) + k ; (k \in \mathbb{R})$$

Soit f une fonction numérique qui admet une fonction primitive sur un intervalle I
Et soit x_0 un élément de I et y_0 un réel quelconque de \mathbb{R}
Il existe une unique fonction primitive F de f sur l'intervalle I qui vérifie la condition initiale:

$$F(x_0) = y_0$$

Les primitives de $f + g$ et kf : ($k \in \mathbb{R}$)

Propriété:

Soit f et g deux fonctions numériques définies sur un intervalle I et k un réel
Si F et G sont deux primitives de f et g successivement sur l'intervalle I alors :

- $F + G$ est une fonction primitive de $f + g$ sur l'intervalle I
- kF est une fonction primitive de kf sur l'intervalle I

Tableau des primitives de quelques fonctions usuelles:

$f(x)$	$F(x)$
$a \in \mathbb{R}$	$ax + k$
x	$\frac{1}{2}x^2 + k$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x} + k$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + k$
$x^r ; (r \in \mathbb{Q}^* - \{-1\})$	$\frac{x^{r+1}}{r+1} + k$
$\sin x$	$-\cos x + k$
$\cos x$	$\sin x + k$
$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + k$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + k$
e^x	$e^x + k$

Utilisation des formules de dérivée pour la détermination de quelques primitives:

$f(x)$	$F(x)$
$u'(x) + v'(x)$	$u(x) + v(x) + k$
$au'(x) ; (a \in \mathbb{R})$	$au(x)$
$u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x)$	$u(x) \times v(x) + k$
$\frac{-v'(x)}{[v(x)]^2}$	$\frac{1}{v(x)} + k$
$\frac{u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x)}{[v(x)]^2}$	$\frac{u(x)}{v(x)} + k$
$\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$	$2\sqrt{u(x)} + k$
$u'(x) \times [u(x)]^r ; (r \in \mathbb{Q}^* - \{-1\})$	$\frac{[u(x)]^{r+1}}{r+1} + k$
$\frac{u'(x)}{u(x)} + k$	$\ln u(x) + k$
$u'(x)e^{u(x)}$	$e^{u(x)} + k$
$\cos(ax + b) ; (a \neq 0)$	$\frac{1}{a} \sin(ax + b) + k$
$\sin(ax + b) ; (a \neq 0)$	$-\frac{1}{a} \cos(ax + b) + k$