I. Généralité sur les suites avec : $(u_n)_{n\geq n_0}$ est une suite son premier terme est u_{n_0} : (rappel)

A. Suite majorée – suite minorée – suite bornée :

a. Définitions :

- Une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est majorée par un réel M si et seulement si $\forall n\geq n_0; u_n \leq M$ (ou $\forall n\geq n_0; u_n < M$).
- Une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est minorée par un réel m si et seulement si $\forall n\geq n_0; u_n \leq M$ (ou $\forall n\geq n_0; u_n < M$).
- Une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est bornée si et seulement si $(u_n)_{n\geq n_0}$ est majorée et bornée .
- Une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est bornée si et seulement si $\exists A\in\mathbb{R}^+; \forall n\geq n_0; |u_n| \leq A$ ou $(< A)$.

B. La monotonie d'une suite :

a. Définition :

- Une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est croissant si et seulement si $\forall n\geq n_0$; $u_n \leq u_{n+1}$.
- Une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est strictement croissant si et seulement si $\forall n\geq n_0$; $u_n < u_{n+1}$.
- Une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est décroissant si et seulement si $\forall n\geq n_0$; $u_n \geq u_{n+1}$.
- Une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est strictement décroissant si et seulement si $\forall n\geq n_0$; $u_n > u_{n+1}$.
- Une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est constante si et seulement si $\forall n\geq n_0$; $u_n = u_{n+1}$.
- Une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est périodique de période $T\in\mathbb{N}^*$ si et seulement si $\forall n\geq n_0$; $u_{n+T} = u_n$.

II. Suite arithmétique – son terme général – la somme S_n : (rappel)

a. Définition :

$(u_n)_{n\geq n_0}$ est une suite numérique . r est un nombre réel non nul .

❖ La suite (u_n) est arithmétique de raison r et de premier terme u_{n_0} équivaut à $\forall n\geq n_0 : u_{n+1} - u_n = r$.
(ou encore $\forall n\geq n_0 : u_{n+1} = u_n + r$) .

❖ $(u_n)_{n\geq n_0}$ est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_{n_0} on a :
$\forall n\geq n_0 : u_n = u_{n_0} + (n-n_0)r$

❖ Pour la somme suivante : $S_n = \sum_{i=p}^{i=n} u_i = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + ... + u_n$ ou a : $S_n = \left[\frac{u_n + u_p}{2}\right]\times(n-p+1)$.

$$S_n = \frac{(\text{le premier terme}) + (\text{le dernier terme})}{2}\times(\text{ le nombre des termes de la somme })$$

❖ Propriété caractéristique : $\forall p\geq n_0$; $\forall q\geq n_0$; $u_q = u_p + (q-p)r$ (avec q et p de $\mathbb{N}$) .

❖ Moyenne arithmétique : $u_i = a$ et $u_{i+1} = b$ et $u_{i+2} = c$ trois termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison r on a : $a + b = 2c$

b. Remarque :

- La somme suivante $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$ possède $n+1$ terme . (c.à.d. $n-0+1$) .
- La somme suivante $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n$ possède n terme . (c.à.d. $n-1+1$) .
- La somme suivante $S_n = u_{n_0} + u_{n_0+1} + u_{n_0+2} + ... + u_n$ possède $n+1$ terme . (c.à.d. $n-n_0+1$)

III. Suite géométrique – son terme général – la somme S_n : (rappel)

c. Définition :

$(u_n)_{n\geq n_0}$ est une suite numérique . q est un nombre réel non nul .

- La suite (u_n) est géométrique de raison q et de premier terme u_{n_0} équivaut à $\forall n \geq n_0 : u_{n+1} = q \times u_n$.
  (ou encore $\forall n \geq n_0 : u_{n+1} = u_n + r$) .
- $(u_n)_{n\geq n_0}$ est une suite géométrique de raison q et de premier terme u_{n_0} on a : $\forall n \geq n_0 : u_n = u_{n_0} \times q^{(n-n_0)}$
- Pour la somme suivante : $S_n = \sum_{i=p}^{i=n} u_i = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + ... + u_n$ ou a :
  - Si $q \neq 1$ on a $S_n = \left[\frac{q^{(n-p+1)} - 1}{q-1}\right] \times u_p$.
  - $q = 1$: $S = \sum_{i=p}^{i=n} u_i = u_p(n-p+1)$.
- Propriété caractéristique : $\forall p \geq n_0$; $\forall q \geq n_0 : u_q = u_p \times q^{q-p}$ (avec q et p de $\mathbb{N}$) .
- Moyenne géométrique : $u_i = a$ et $u_{i+1} = b$ et $u_{i+2} = c$ trois termes consécutifs d'une suite géométrique de raison q on a : $a \times c = b^2$

IV. Limites d'une suite numérique : $(n \mapsto +\infty)$

A. Limite finie d'une suite :

a. Activité :

- On considère la suite (u_n) définie par : $u_n = \frac{1}{n}$; $n \geq 2$.
- Sur une droite graduée on présente l'intervalle $I_0 = \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[$ de centre 0 avec unité de mesure 2 cm .
- Calculer quelques termes de la suite et on les place sur la droite graduée , que remarquez-vous ?
- Si n tend vers $+\infty$, que peut-on dire des termes u_n de la suite ?

b. Vocabulaire :

- On dit que la limite de la suite (u_n) est 0 (zéro) lorsque n tend vers $+\infty$.
- On écrit : $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

c. Définition :

$(u_n)_{n\geq n_0}$ est une suite numérique.

On dit que la limite de la suite (u_n) est le nombre réel ℓ si pour tout intervalle ouvert I_ℓ et de centre ℓ contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang , on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

d. Propriété :

- Si une suite a une limite alors cette limite est unique .
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ et ; $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^i} = 0 \ (i\in\mathbb{N}^*)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - \ell) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

e. Exemple :

❖ On considère la suite $(u_n)_{n\geq1}$ définie par : $u_n = \frac{1}{n} + 3$, on montre que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$.

On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - 3) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} + 3 - 3 = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$.

B. Limite infinie d'une suite :

a. Définition :

$(u_n)_{n\geq n_0}$ est une suite numérique.

- On dit que la limite de la suite (u_n) est $+\infty$ si pour tout A de $\mathbb{R}^+$ l'intervalle $]A,+\infty[$ contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang , on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
- On dit que la limite de la suite (u_n) est $-\infty$ si pour tout A de $\mathbb{R}^+$ l'intervalle $]-\infty,A[$ contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang , on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

b. Propriété :

- Si une suite a une limite alors cette limite est unique .
- $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ et ; $\lim\limits_{n\to+\infty} n^i = +\infty \ (i\in\mathbb{N}^*)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$.

C. Convergence d'une suite numérique :

a. Définition :

$(u_n)_{n\geq n_0}$ est une suite numérique.

- Si la limite de la suite (u_n) est finie on dit que la suite (u_n) est convergente .
- Si la limite de la suite (u_n) est infinie ou la suite (u_n) n'a pas de limite on dit que la suite (u_n) est divergente .

b. **Exemple :**

- $u_n = n^4$ on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ d'où la suite (u_n) est divergente .
- $u_n = (-1)^n$ cette suite n'a pas de limite car si n est paire on a $u_n = 1$ et si n est impaire on a $u_n = -1$ et la propriété (Si une suite a une limite alors cette limite est unique) .
- $u_n = \frac{1}{n} + 3n$; ≥ 1 on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$ d'où la suite (u_n) est convergente .

c. **Propriété :**

- Toute suite croissante et majorée est une suite convergente .
- Toute suite décroissante et minorée est une suite convergente .

d. **Exemple :**

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_n = \frac{1}{n^3} + 7$; $n \geq 1$.

1. Montrer que la suite (u_n) est minorée .
2. Montrer que la suite (u_n) est décroissante .
3. En déduit la convergence de la suite (u_n) .

Réponse :

1. la suite (u_n) est minorée :

on a :

$$n \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{n} > 0$$
$$\Rightarrow \left(\frac{1}{n}\right)^3 > 0$$
$$\Rightarrow \frac{1}{n^3} + 7 > 7$$
$$\Rightarrow \frac{1}{n^3} + 7 > 0$$
$$\Rightarrow u_n > 0$$

Par suite : (u_n) est minorée par 0 (zéro) .

2. la suite (u_n) est décroissante .

on a :

$$n+1 \geq n \Rightarrow (n+1)^3 \geq n^3$$
$$\Rightarrow \frac{1}{(n+1)^3} \leq \frac{1}{n^3}$$
$$\Rightarrow u_{n+1} \leq u_n$$

Donc : la suite (u_n) est décroissante .

3. En déduit la convergence de la suite (u_n) :

On a : la suite (u_n) est décroissante et minorée donc d'après une propriété la suite (u_n) est convergente .

V. Operations sur les limites des suites :

a. Propriété :

Soient $(u_n)_{n\geq n_0}$ et $(v_n)_{n\geq n_0}$ deux suites numériques .

- Les opérations sur les suites sont les mêmes que les opération des fonctions.
  exemple : $(u_n)_{n\geq n_0}+(v_n)_{n\geq n_0}=(u_n+v_n)_{n\geq n_0}$.
- Les propriétés des opérations des limites des suites sont les mêmes que celles des fonctions .
  exemple 1 : si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=\ell'$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n+v_n=\ell+\ell'$.
  exemple 2 : si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=-\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n+v_n=-\infty$.
- si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\ell$ et $u_n>0$ alors $\ell>0$.
- si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=\ell'$ et $v_n\leq u_n$ alors $\ell'\leq\ell$.

b. application :

1. calculer la limite de la suite suivante : $u_n=\frac{1}{n}$; $n\geq 1$.

on a : $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 3=3$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=3$.

2. calculer la limite de la suite suivante : $v_n=\left(\frac{1}{n}+3\right)\sqrt{n}$; $n\geq 1$.

On a : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}+3\right)=3$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n}=+\infty$ d'où : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}+3\right)\sqrt{n}=+\infty$.

VI. Critères de convergences :

a. Critères :

Soient $(u_n)_{n\geq n_0}$ et $(v_n)_{n\geq n_0}$ et $(w_n)_{n\geq n_0}$ trois suites numériques tel que à partir d'un rang p on a pour tout $n\geq p\geq n_0$ (avec $n\in\mathbb{N}$) .$\alpha>0$ et $\ell\in\mathbb{R}$

1. Si $v_n\leq u_n\leq w_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=\lim\limits_{n\to+\infty} w_n=\ell$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\ell$.
2. Si $v_n\geq\alpha.u_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=+\infty$.
3. Si $v_n\leq\alpha.u_n$ et $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=-\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=\ell$.
4. Si $|v_n-\ell|\leq\alpha.u_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\ell$.

b. Application :

Application 1 : On considère la suite numérique (u_n) définie par : $v_n = \frac{(-1)^n}{n} - 5 \; ; n > 0$.

1. Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -5$.

On a :

$$-1 \le (-1)^n \le 1 \Rightarrow \frac{-1}{n} \le \frac{(-1)^n}{n} \le \frac{1}{n}$$
$$\Rightarrow \frac{-1}{n} - 5 \le \frac{(-1)^n}{n} - 5 \le \frac{1}{n} - 5$$
$$\Rightarrow \frac{-1}{n} - 5 \le v_n \le \frac{1}{n} - 5$$

On sait que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-1}{n} - 5 = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} - 5 = -5$.

D'après l'un des critères de convergences on obtient : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -5$

Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -5$.

Application 2 : On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_n = 2n + \cos(n) \; ; \; n \ge 0$.

1. Calculer : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

On a : $-1 \le \cos(n) \le 1 \Leftrightarrow 2n - 1 \le 2n + \cos(n) \le 2n + 1$

Donc : $2n - 1 \le 2n + \cos(n)$

D'où : $2n - 1 \le u_n$

On sait que : $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n\text{-}1 = +\infty$

D'après l'un des critères de convergences on obtient : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n + \cos(x) = +\infty$.

Application 1 : On considère la suite numérique (u_n) définie par : $v_n = \frac{\cos n}{n} \; ; n \ge 1$.

2. Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

On a : $|v_n - 0| = \left|\frac{\cos n}{n}\right| = \frac{|\cos n|}{n} \le \frac{1}{n}$ (car $|\cos n| \le 1$)

D'où : $|v_n - 0| \le \frac{1}{n}$ puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

c. Exercice :

Calculer : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\cos n}{n^2}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\cos n + 5}{n^3}$.

VII. Suite de la forme particulières :

A. Suite de la forme : $u_n = q^n$ avec $q \in \mathbb{R}$:

a. Propriété :

- Si $q>1$ alors $\lim_{n\to+\infty} q^n=+\infty$.
- Si $q=1$ alors $\lim_{n\to+\infty} q^n=1$.
- Si $-1<q<1$ alors $\lim_{n\to+\infty} q^n=0$.
- Si $q\leq -1$ alors q^n n'a pas de limite .

b. Exemple :

- $\lim_{n\to\infty} 3^n=+\infty$, car $q=3>1$.
- $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$ car $-1<q=\frac{1}{2}<1$.
- $\lim_{n\to+\infty}\frac{2^n-8^n}{7^n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2^n}{7^n}-\frac{8^n}{7^n}$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{7}\right)^n-\left(\frac{8}{7}\right)^n=0$$

(car $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{7}\right)^n=0$ et $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{8}{7}\right)^n=0$; $-1<\frac{2}{7}<1$ et $-1<\frac{8}{7}<1$).

B. Suite de la forme $u_n=n^r$ avec $r\in\mathbb{Q}^*$

a. Propriété :

- Si $r>0$ alors $\lim_{n\to+\infty} n^r=+\infty$.
- Si $r<0$ alors $\lim_{n\to+\infty} n^r=0$.

b. Exemple :

Soit la suite (u_n) définie par : $u_n=\sqrt[7]{n^3}$; $n\geq 1$.

Calculons : $\lim_{n\to+\infty} u_n$:

1ère méthode : On a : $\lim_{n\to+\infty} u_n=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[7]{n^3}=\lim_{n\to+\infty} n^{\frac{3}{7}}=+\infty$ car $r=\frac{3}{7}>0$.

2ième méthode : $\lim_{n\to+\infty} n^3=+\infty$ donc $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[7]{n^3}=+\infty$.

Conclusion : $\lim_{n\to+\infty} u_n=+\infty$.

C. Suite $(v_n)_{n\geq n_0}$ de la forme $v_n=f(u_n)$:

a. Activité :

On considère la fonction f définie par : $f(x)=\frac{2x-5}{7x+4}$ et la suite (u_n) définie par $\left(u_n=\frac{1}{n^3}\right)_{n\geq 1}$.

1. On considère la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ définie par : $v_n = f(u_n)$.
- Ecrire la suite (v_n) en fonction du terme u_n .
- En déduit v_n en fonction de n .

2. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.
3. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ en déduit une relation entre $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ et f et ℓ .

b. Propriété :

Si une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ converge vers ℓ (c.à.d. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$) et f est une fonction continue en ℓ alors la suite $(v_n)_{n\geq n_0}$ définie par $v_n = f(u_n)$ est convergente vers $f(\ell)$ (c.à.d. $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = f(\ell)$) .

c. Exemple :

On considère la fonction $f(x) = \dfrac{5x-6}{x+3}$ et la suite $u_n = \dfrac{\cos n}{n}$; $n \geq 1$ et la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ définie par : $v_n = f(u_n)$.

1. Ecrire la suite (v_n) en fonction de n .
2. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
3. On détermine $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$

Correction :

1. la suite (v_n) en fonction de n .

on a : $v_n = f(u_n) = \dfrac{5u_n - 6}{u_n + 3} = \dfrac{5\times\dfrac{\cos n}{n} - 6}{\dfrac{\cos n}{n} + 3} = \dfrac{5\cos n - 6n}{\cos n + 3n}$.

Conclusion : $v_n = \dfrac{5\cos n - 6n}{\cos n + 3n}$.

2. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

On a : $\forall x \in \mathbb{R}$; $-1 \leq \cos x \leq 1$ donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $-1 \leq \cos n \leq 1$

Par suite $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $-1\times\dfrac{1}{n} \leq \dfrac{1}{n}\times\cos n \leq 1\times\dfrac{1}{n} \Rightarrow -\dfrac{1}{n} \leq u_n \leq \dfrac{1}{n}$

Or : $\lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{1}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

D'où : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ (d'après un critère de convergence) .

3. On détermine $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$

On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et la fonction f est continue en 0 (car f est continue sur $D_f = \mathbb{R}\setminus\{-3\}$) et $v_n = f(u_n)$ donc d'après la propriété la limite de la suite (v_n) est $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = f(0) = -2$.

Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -2$

D. Suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$:

a. Définition :

Soit une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ tel que $\forall n \geq n_0$; $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f est une fonction .

Si on a :

- f est une fonction continue sur un intervalle I .
- $f(I) \subset I$.
- $u_{n_0} \in I$ (le premier terme) .
- La suite (u_n) est convergente (vers $\ell \in \mathbb{R}$)

Alors ℓ est solution de l'équation $x \in I$, $f(x) = x$ (c.à.d. ℓ vérifie $\ell = f(\ell)$) .

b. Exemple :

On considère la fonction $f(x) = \sqrt{x+6}$.

1. Donner le tableau de variation de f .
2. On considère l'intervalle $I = [0,3]$.
   - Déterminer $f(I)$.
3. On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \sqrt{6+u_n} \ ; n \geq 0 \end{cases}$
   - Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$; $0 \leq u_n \leq 3$
   - Montrer que la suite (u_n) est croissante .
   - La suite (u_n) est convergente ?
   - Ecrire la suite (u_n) en fonction de f et de u_n
4. Déterminer la limite de la suite (u_n) .

Correction :

1. On donne le tableau de variation de f .

On a :

- $f'(x) = \left(\sqrt{x+6}\right)' = \dfrac{(x+6)'}{2\sqrt{x+6}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x+6}} > 0$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
- Le tableau de variation de f est :

x	-6		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$ $+\infty$	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

2. On détermine $f(I)$.

La fonction f est continue sur son domaine de définition $D_f = [-6,+\infty[$ donc f est continue sur $I=[0;3]$

On a : $f(I)=f([0;3])$

$=[f(0),f(3)]$ (car l'image d'un intervalle est un intervalle et puisque f est croissante).

$=[\sqrt{6};3]$

Conclusion : $f(I)=f([0;3])=[\sqrt{3},3]\subset[0,3]$.

3. ..

- Montrons que : $\forall n\in\mathbb{N}\ ;\ 0\le u_n\le 3$

  On démontre par récurrence :

  - On vérifie la relation est vrai pour $n=0$, on a : $0\le u_0=2\le 3$ donc la relation est vrai pour $n=0$.
  - On suppose que la relation est vraie pour n de $\mathbb{N}$ c.à.d. $0\le u_n\le 3$ (hypothèse de récurrence)
  - On démontre que : la relation est vraie pour $n+1$ c.à.d. on démontre que $0\le u_{n+1}\le 3$.

  D'après hypothèse de récurrence on a :

  $0\le u_n\le 3\Rightarrow 6\le 6+u_n\le 9\ ;\ (+6)$

  $\Rightarrow\sqrt{6}\le\sqrt{6+u_n}\le 3\left(\text{car la fonction } x\mapsto\sqrt{x}\text{ est croissante}\right)$

  $\Rightarrow\sqrt{6}\le u_{n+1}\le 3$

  Donc la relation est vraie pour $n+1$.

  Conclusion : On applique le principe de récurrence on a : $\forall n\in\mathbb{N}\ ;\ 0\le u_n\le 3$

- Montrons que la suite (u_n) est croissante .

  On montre que pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a $u_{n+1}-u_n\ge 0$

  On a :

  $u_{n+1}-u_n=\sqrt{6+u_n}-u_n=\dfrac{6+u_n-u_n^2}{\sqrt{6+u_n}+u_n}=\dfrac{(3-u_n)(2+u_n)}{\sqrt{6+u_n}+u_n}$ son signe est le signe de $(3-u_n)(2+u_n)$.(on peut écrire $(3-x)(2+x)$ avec $x=u_n$)

u_n	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$(3-u_n)(2+u_n)=u_{n+1}-u_n$		$-$	0	$+$	0	$-$	

  Puis que $0\le u_n\le 3$ donc $u_{n+1}-u_n\ge 0$.

  Conclusion : la suite (u_n) est croissante

- La suite (u_n) est convergente car la suite est croissante et majorée par 3 (d'après une propriété)
- On écrire la suite (u_n) en fonction de f et de u_n , on a $\forall n\in\mathbb{N}\ ;\ u_{n+1}=f(u_n)$.

5. On déterminer la limite de la suite (u_n) .

On a :

- f est une fonction continue sur l'intervalle I .
- $f(I)=f([0;3])$.
- $u_0=2\in[0;3]$ (le premier terme) .
- La suite (u_n) est convergente (vers $\ell\in\mathbb{R}$)

Donc d'après une propriété on a ℓ est solution de l'équation $x\in I\ ,f(x)=x$.

On résout l'équation $x\in I\ ,f(x)=x$.

$$
\begin{aligned}
f(x)=x &\Leftrightarrow \sqrt{x+6}=x\\
&\Leftrightarrow x+6=x^2\\
&\Leftrightarrow -x^2+x+6=0\\
&\Leftrightarrow (3-x)(x+2)=0\\
&\Leftrightarrow x=3\in[0;3] \text{ ou } x=-2\notin[0;3]
\end{aligned}
$$

D'où : $\ell=3\in[0;3]$

Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=3$