



1.

On considère la fonction numérique  $f$  définie par :  $f(x) = x + \frac{2}{\sqrt{x+1}}$ , et soit  $(C_f)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  ( unité de 1 cm ).

1. ..

- a. Déterminer  $D_f$  domaine de définition de la fonction  $f$ .
- b. Calculer :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ , puis interpréter géométriquement le deuxième résultat.
- c. Montrer que : la courbe  $(C_f)$  admet une asymptote oblique  $(\Delta)$  au voisinage de  $+\infty$  dont on déterminera son équation.
- d. Etudier la position relative de la courbe  $(C_f)$  et la droite  $(\Delta)$ .

2. ..

- a. Montrer que :  $f'(x) = 1 - \frac{1}{(x+1)\sqrt{x+1}}$  pour tout  $x$  de  $D_f$ .
- b. Montrer que : pour tout  $x$  de  $[-1, 0]$  on a  $\frac{1}{(x+1)\sqrt{x+1}} \geq 1$  puis en déduire le signe de  $f'(x)$  sur  $[-1, 0]$ .
- c. Montrer que : pour tout  $x$  de  $[1, +\infty[$  on a  $\frac{1}{(x+1)\sqrt{x+1}} \leq 1$  puis en déduire le signe de  $f'(x)$  sur  $[1, +\infty[$ .
- d. Dresser le tableau de variations de la fonction  $f$  sur  $D_f$ .
- e. Donner l'équation de la tangente  $(T)$  à la courbe  $(C_f)$  au point  $x_0 = 0$ .

3. Montrer que : l'équation  $x \in ]-1; +\infty[$  ;  $f(x) = x$  admet une solution unique  $\alpha$  tel que :  $0 < \alpha < 1$ .

4. Construire la droite  $(\Delta)$  et la tangente  $(T)$  et la courbe  $(C_f)$  de  $f$  dans le même repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

5. ..

- a. Montrer que la fonction  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$  définie sur l'intervalle  $J$  dont le déterminera.
- b. Montrer que : la fonction réciproque  $f^{-1}$  est dérivable sur l'intervalle  $J$ .
- c. Calculer  $(f^{-1})'(\alpha)$  en fonction de  $\alpha$ .
- d. Construire dans le même repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  la courbe représentative  $(C_{f^{-1}})$  de la fonction  $f^{-1}$ .

2.

## PREMIERE PARTIE

On considère la fonction numérique  $f$  définie par :  $f(x) = \frac{3(x+1)}{\sqrt{2x-1}}$ , et soit  $(C_f)$  sa courbe représentative dans



un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  ( unité de 1 cm ).

**1.** ..

- a.** Déterminer  $D_f$  domaine de définition de la fonction  $f$  .
- b.** Calculer :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 0}} f(x)$  , puis interpréter géométriquement le deuxième résultat .
- c.** Montrer que : la courbe  $(C_f)$  admet , au voisinage de  $+\infty$  une branche parabolique dont on déterminera la direction

**2.** ..

- a.** Montrer que :  $f'(x) = \frac{3(x-2)}{(2x-1)\sqrt{2x-1}}$  pour tout  $x$  de  $D_f$  .
- b.** Montrer que la fonction  $f$  est décroissante sur  $\left] \frac{1}{2}, 2 \right]$  et la fonction  $f$  est croissante sur  $[2, +\infty[$  .
- c.** Dresser le tableau de variations de la fonction  $f$  sur  $D_f$  .

**3.**

- a.** Montrer que :  $\forall x \in D, f''(x) = \frac{3(5-x)}{(2x-1)^2}$  pour tout  $x$  de  $D_f$  .
- b.** Etudier le signe de la fonction dérivée seconde de  $f$  puis déterminer les coordonnées du point I d'inflexion à la courbe  $(C_f)$  .
- c.** Donner l'équation de la tangente  $(T)$  à la courbe  $(C_f)$  au point I .

**4.** Construire la tangente  $(T)$  et la courbe  $(C_f)$  de  $f$  dans le même repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  .

**5.** On considère  $g$  la restriction de la fonction  $f$  sur  $I = [2, +\infty[$  .

- a.** Montrer que la restriction  $g$  admet une fonction réciproque  $g^{-1}$  définie sur l'intervalle  $J$  dont le déterminera .
- b.** Calculer  $g(5)$  puis montrer que la fonction réciproque  $g^{-1}$  est dérivable en 6 puis calculer  $(g^{-1})'(6)$
- c.** Construire dans le même repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  la courbe représentative  $(C_{g^{-1}})$  de la fonction  $g^{-1}$  .

## DEUXIÈMEE PARTIE

La figure ci-contre représente  $(C_h)$  la courbe représentative de la fonction  $h$  définie sur  $\left] \frac{1}{2}, +\infty \right[$  par :

$$h(x) = f(x) - x.$$

**1.** ..



a.  $\alpha$  est un réel tel que :  $6,4 < \alpha < 6,5$  ( voir la figure ) . En déduire graphiquement la seule solution de l'équation  $h(x) = 0$  en déduire  $f(\alpha)$  .

b. Déterminer le signe de  $h(x)$  sur  $I = [5, \alpha]$  .

c. Montrer que :  $f([5, \alpha]) \subset [5, \alpha]$  ( l'image de l'intervalle I par la fonction f ( attention f mais pas h ) )

2. Soit  $(u_n)$  la suite numérique définie par  $u_0 = 5$  et  $u_{n+1} = f(u_n)$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$  .

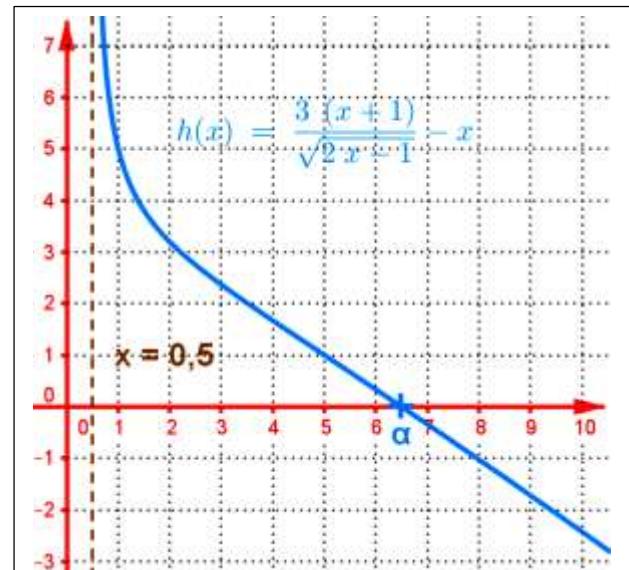
a. Calculer  $u_1$  .

b. Montrer par récurrence que :  $5 \leq u_n \leq \alpha$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$  .

c. montrer que la suite  $(u_n)$  est convergente .

d. En déduire que la suite  $(u_n)$  est convergente .

e. Calculer la limite de la suite  $(u_n)$  .



3.

On considère la fonction numérique f définie par :  $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}}$ , et soit  $(C_f)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  ( unité de 2 cm ).

1. ..

a. Montrer que f est définie sur  $D_f = \mathbb{R}$  .

b. Calculer :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  , puis interpréter géométriquement les deux résultats .

c. Montrer que : la courbe  $(C_f)$  admet , au voisinage de  $+\infty$  une branche parabolique dont on déterminera la direction

2. ..

a. Montrer que :  $f'(x) = \frac{1}{(x^2-2x+2)\sqrt{x^2-2x+2}}$  pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$  .

b. Montrer que la fonction f est croissante sur  $D_f$  .

c. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur  $\mathbb{R}$  .

3.

a. Montrer que : le point I(1;0) est un centre de symétrie de la courbe  $(C_f)$  .

b. Donner l'équation de la tangente  $(T)$  à la courbe  $(C_f)$  au point I .

4. Construire la tangente  $(T)$  et la courbe  $(C_f)$  de f dans le même repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  .



5.

- a. Montrer que la fonction  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$  définie sur l'intervalle  $J$  dont le déterminera .
- b. Construire dans le même repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  la courbe représentative  $(C_{f^{-1}})$  de la fonction  $f^{-1}$  .
- c. Calculer  $f(1)$  puis montrer que la fonction réciproque  $f^{-1}$  est dérivable en 0 puis calculer  $(f^{-1})'(0)$

4.

On considère la fonction numérique  $f$  définie par : 
$$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{x-1} & ; x < 0 \\ f(x) = x + \sqrt{x^2 + 2x} & ; x \geq 0 \end{cases}$$
, et soit  $(C_f)$  sa courbe

représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  ( unité de 2 cm ).

1. ..

- a. Montrer que  $f$  est définie sur  $D_f = \mathbb{R}$  .
- b. Etudier la continuité de la fonction  $f$  au point  $x_0 = 0$  .

2. ..

- a. Calculer :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  , puis interpréter géométriquement le deuxième résultat .
- b. Vérifier que :  $x + \sqrt{x^2 + 2x} - (2x + 1) = \frac{-1}{x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x}}$  pour tout  $x$  de  $[0, +\infty[$  .
- c. En déduire la position relative de la courbe  $(C_f)$  et la droite  $(\Delta)$  d'équation  $y = 2x + 1$  sur l'intervalle  $[0, +\infty[$  .
- d. Calculer :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (2x + 1)$  , puis interpréter géométriquement le résultat .

3. ..

- a. Calculer :  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x}$  puis interpréter géométriquement le résultat .
- b. Etudier la dérивabilité à gauche de la fonction  $f$  au point  $x_0 = 0$  .
- c. Est-ce que la fonction  $f$  est dérivable au point  $x_0 = 0$  .

4. ..

- a. Montrer que la fonction  $f$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$  , puis vérifier que  $f'(x) = 1 + \frac{x+1}{\sqrt{x^2 + 2x}}$  pour tout  $x$  de  $]0, +\infty[$  , en déduire le signe de sur  $]0, +\infty[$  .
- b. Vérifier que :  $f'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2}$  pour tout  $x$  de  $]-\infty, 0[$  , en déduire le signe de sur  $]0, +\infty[$  .
- c. Dresser le tableau de variations de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$  .

5. Construire la courbe  $(C_f)$  de  $f$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

6. On considère  $g$  la restriction de la fonction  $f$  sur  $I = [0, +\infty[$ .

a. Montrer que la restriction  $g$  admet une fonction réciproque  $g^{-1}$  définie sur l'intervalle  $J$  dont le déterminera.

b. Construire dans le même repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  la courbe représentative  $(C_{g^{-1}})$  de la fonction  $g^{-1}$ .

c. Calculer :  $g\left(\frac{1}{4}\right)$  puis  $(g^{-1})'(1)$ .

d. Déterminer la fonction réciproque  $g^{-1}$ .

e. Sans calculer la limite  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{g^{-1}(x)}{x}$  interpréter géométriquement le résultat on utilise le résultat de la

question 3.a.

5.

On considère la fonction numérique  $f$  définie sur  $[0, +\infty[$  par : 
$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} & ; x \in [0; 1[ \cup ]1; +\infty[ \\ f(1) = \frac{1}{2} \end{cases}$$
 et

soit  $(C_f)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  (unité de 2 cm).

1. ..

a. Calculer :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ , puis interpréter géométriquement le résultat.

b. Etudier la continuité de la fonction  $f$  au point  $x_0 = 1$ .

c. Etudier la continuité à droite de la fonction  $f$  au point  $x_0 = 0$ .

2. ..

a. Montrer que la fonction  $f$  est dérivable au point  $x_0 = 1$  et le nombre dérivé est  $f'(1) = -\frac{1}{8}$ .

b. Donner l'équation de la tangente  $(T)$  à la courbe  $(C_f)$  au point  $x_0 = 1$ .

c. Etudier la dérивabilité à droite de la fonction  $f$  au point  $x_0 = 0$ .

d. Est-ce que la fonction  $f$  est dérivable sur  $]0, +\infty[ \setminus \{1\}$  puis vérifier la fonction dérivée de  $f$  sur

$$]0, +\infty[ \setminus \{1\} \text{ est } f'(x) = \frac{-\sqrt{x} - 1}{2\sqrt{x}(x-1)^2}.$$

e. Dresser le tableau de variations de la fonction  $f$  sur  $[0, +\infty[$ .

3. Construire la courbe  $(C_f)$  de  $f$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

4. On considère  $g$  la restriction de la fonction  $f$  sur  $I = [0, +\infty[$ .



- a. Montrer que la fonction  $g$  admet une fonction réciproque  $g^{-1}$  définie sur l'intervalle  $J$  dont le déterminera .
- b. Construire dans le même repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  la courbe représentative  $(C_{g^{-1}})$  de la fonction  $g^{-1}$  .
- c. Calculer  $g(4)$  puis montrer que la fonction réciproque  $g^{-1}$  est dérivable en  $\frac{1}{3}$  puis calculer  $(g^{-1})' \left( \frac{1}{3} \right)$  .

6.

## PREMIERE PARTIE

On considère la fonction numérique  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $g(x) = x^3 - 3x + 2$ .

1. ..

- a. Calculer :  $g(-2)$  .
- b. Calculer :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$  .

2. ..

- a. Calculer :  $g'(x)$  pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$  .
- b. Etudier le signe de  $g'(x)$  puis dresser le tableau de variations de  $g$  sur  $\mathbb{R}$  .
- c. Déterminer le signe de la fonction  $g$  sur  $\mathbb{R}$  , on précise les deux valeurs pour lesquelles  $g(x)$  s'annule.
- d. Montrer que :  $g([3, +\infty[) \subset [3, +\infty[$  .

## DEUXIÈMEE PARTIE

Soit la fonction numérique  $g$  définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$  par : 
$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}, & x \neq -1 \text{ et } x \neq 1 \\ f(1) = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Soit  $(C_f)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  ( unité de 1 cm ).

1. ..

- a. Etudier la continuité de la fonction  $f$  au point  $x_0 = 1$ .
- b. Calculer les limites suivantes :  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x)$  et  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x)$  puis interpréter géométriquement les résultats

2. ..

- a. Calculer :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - x$  puis interpréter géométriquement les résultats
- b. Calculer :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  puis déterminer la branche infinie de  $(C_f)$  au voisinage de  $-\infty$  .
- c. Déterminer la position relative de la droite  $(D)$  d'équation  $y = x$  et la courbe  $(C_f)$

3. Etudier la dérивabilité de la fonction  $f$  au point  $x_0 = 1$  ( remarquer que  $2x^3 - 3x^2 + 1 = (x-1)^2(2x-1)$  )



a. Vérifier que :  $f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2 - 1)^2}$  pour tout  $x$  de  $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$  .

b. Déterminer le signe de  $f'(x)$  pour tout  $x$  de  $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$  .

c. Dresser le tableau de variations de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$

**4.** Construire dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  la droite  $(D)$  et la courbe  $(C_f)$ . ( unité de 1 cm ).

### **TROISIÈMEE PARIE**

Soit  $a$  est un nombre réel , on considère la suite  $(u_n)$  définie par :  $u_0 = a$  et  $u_{n+1} = g(u_n) - u_n$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$  .

**1.** On prend le cas :  $a = 2$  , montrer que :  $u_n = 2$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$

**2.** On prend le cas :  $a = -2$  , montrer que :  $u_n = 2$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ .

**3.** On prend le cas :  $a = 0$  , montrer que :  $u_n = 2$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ .

**4.** On prend le cas :  $a = 3$  , Montrer que :  $u_n \geq 3$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$  .

7.

On considère la fonction numérique  $f$  définie sur  $[0, +\infty[$  par :  $f(x) = x - 2\sqrt{x} + 2$ , et soit  $(C_f)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  ( unité de 2 cm ).

**1.**

- a. Calculer la limite suivante :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  .
- b. Calculer les limites suivantes :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x$  puis interpréter géométriquement les résultats obtenus .
- c. Etudier la position relative de la courbe  $(C_f)$  et la droite  $(\Delta)$  d'équation  $(\Delta) : y = x$  .

**2.**

- a. .. Etudier la dérivableté à droite de la fonction  $f$  au point  $x_0 = 1$  ( remarquer que  $2x^3 - 3x^2 + 1 = (x-1)^2(2x-1)$  )
- b. Calculer  $f'(x)$  pour tout  $x$  de  $]0, +\infty[$  puis vérifier que  $f'(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$  .
- c. Déterminer le signe de  $f'(x)$  pour tout  $x \in ]0, +\infty[$  .
- d. dresser le tableau de variations de la fonction  $f$  sur  $[0, +\infty[$

**3.** Construire dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  la droite  $(\Delta)$  et la courbe  $(C_f)$ . ( unité de 2 cm ).

**4.** On considère  $g$  la restriction de la fonction  $f$  sur  $I = [1, +\infty[$  .

- a. Montrer que la fonction  $g$  admet une fonction réciproque  $g^{-1}$  définie sur l'intervalle  $J$  dont le déterminera .



**b.** Construire dans le même repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  la courbe représentative  $(C_{g^{-1}})$  de la fonction  $g^{-1}$  .

**c.** Déterminer :  $g^{-1}(x)$  ( remarquer que  $x - 2\sqrt{x} + 2 = (\sqrt{x} - 1)^2$  )

**5.** Soit  $(u_n)$  la suite numérique définie par  $u_0 = 2$  et  $u_{n+1} = g(u_n)$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$  .

**a.** Montrer par récurrence que :  $u_n > 1$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$  .

**b.** Montrer que la suite  $(u_n)$  est décroissante .

**c.** En déduire que la suite  $(u_n)$  est convergente .

**d.** Calculer la limite de la suite  $(u_n)$  .

**8.**

On considère la fonction numérique  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = x + 3 - \sqrt{x^2 + 5}$ , et soit  $(C_f)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  ( unité de 1 cm ).

**1.** ..

**a.** Montrer que :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$  , puis interpréter géométriquement le résultat .

**b.** Calculer :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  .

**c.** Montrer que : la droite  $(\Delta)$  d'équation  $y = 2x + 3$  est une asymptote oblique à la courbe  $(C_f)$  au voisinage de  $+\infty$  .

**d.** déterminer l'intersection de la courbe  $(C_f)$  et l'axe des abscisses.

**2.** ..

**a.** Calculer  $f'(x)$  pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$  puis vérifier que  $f'(x) = \frac{-x + \sqrt{x^2 + 5}}{\sqrt{x^2 + 5}}$  .

**b.** Montrer que :  $\sqrt{x^2 + 5} - x \geq 0$  puis en déduire les variations de sur  $\mathbb{R}$  .

**c.** dresser le tableau de variations de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$  .

**d.** Ecrire l'équation réduite de la tangente à  $(C_f)$  au point  $x_0 = -\frac{2}{3}$  .

**e.** Déterminer :  $f([1, 2])$  et  $f([2, 3])$  .

**3.** ..

**a.** Etudier le signe de :  $f(x) - x$  ( remarquer que  $f(x) - x = \frac{4 - x^2}{3 + \sqrt{x^2 + 5}}$  ) .

**b.** Etudier la position relative de la droite  $(\Delta)$  et la courbe  $(C_f)$  .

**c.** Construire dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  la droite  $(\Delta)$  et la courbe  $(C_f)$  . ( unité de 1 cm ) .

**4.** ..

**a.** Montrer que la fonction  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$  définie sur l'intervalle  $J = ]-\infty, 3[$

**b.** Construire dans le même repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  la courbe représentative  $(C_{f^{-1}})$  de la fonction  $f^{-1}$  .



c. Montrer que : la fonction réciproque  $f^{-1}$  est dérivable en 2.

d. Calculer :  $f(2)$  puis  $(f^{-1})'(2)$ .

**5.** Soit  $(u_n)$  la suite numérique définie par  $u_0 = 1$  et  $u_{n+1} = f(u_n)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

- Montrer par récurrence que :  $1 \leq u_n \leq 2$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
- Montrer que la suite  $(u_n)$  est croissante.
- En déduire que la suite  $(u_n)$  est convergente.
- Calculer la limite de la suite  $(u_n)$ .

**6.** Soit  $(v_n)$  la suite numérique définie par  $v_0 = 3$  et  $v_{n+1} = f(v_n)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

- Montrer par récurrence que :  $2 \leq v_n \leq 3$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
- Montrer que la suite  $(v_n)$  est décroissante.
- En déduire que la suite  $(v_n)$  est convergente.
- Calculer la limite de la suite  $(v_n)$ .

9.

On considère la fonction numérique  $f$  définie par :  $f(x) = -2 + \frac{x+2}{\sqrt{x+1}}$ .

et soit  $(C_f)$  la courbe représentative de la fonction  $f$  dans un repère orthonormé  $(O, i, j)$  (unité de 1 cm).

**I.**

**1.** Montrer que :  $D_f = ]-1, +\infty[$  (  $D_f$  ensemble de définition de la fonction  $f$  )

- Calculer :  $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x)$  puis interpréter géométriquement le résultat.
- Calculer :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .
- Montrer que  $(C_f)$  admet au voisinage de  $+\infty$  une branche parabolique de direction asymptotique au voisinage de  $+\infty$  dont on déterminera sa direction.

**2.**

- Calculer  $f'(x)$  pour tout  $x$  de  $]-1, +\infty[$  puis vérifier que  $f'(x) = \frac{x}{2(x+1)\sqrt{x+1}}$ .
- Etudier le signe de  $f'(x)$  sur  $]-1, +\infty[$ .
- dresser le tableau de variations de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .
- Ecrire l'équation réduite de la tangente à  $(C_f)$  au point  $x_0 = -\frac{2}{3}$ .

**3.** ..

- Montrer que : pour tout  $x$  de  $]-1, +\infty[$  que  $f''(x) = \frac{2-x}{4(x+1)^2\sqrt{x+1}}$ .
- En déduire la concavité de la courbe  $(C_f)$  et les coordonnées de l'unique point d'inflexion de  $(C_f)$ .

**4.** Construire dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  la droite  $(\Delta)$  et la courbe  $(C_f)$ . ( unité de 1 cm ).

**5.** On considère  $g$  la restriction de la fonction  $f$  sur  $I = [0, +\infty[$ .

**a.** Montrer que la fonction  $g$  admet une fonction réciproque  $g^{-1}$  définie sur l'intervalle  $J$  dont le déterminera .

**b.** Construire dans le même repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  la courbe représentative  $(C_{g^{-1}})$  de la fonction  $g^{-1}$  .

**c.** Calculer  $g(3)$  puis montrer que : la fonction réciproque  $g^{-1}$  est dérivable en  $\frac{4}{3}$ .

**d.** Calculer :  $(g^{-1})' \left( \frac{4}{3} \right)$ .

**6.** Soit  $(u_n)$  la suite numérique définie par  $u_0 = 3$  et  $u_{n+1} = g(u_n)$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$  .

**a.** Montrer par récurrence que :  $0 \leq u_n \leq 3$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$  .

**b.** Montrer que la suite  $(u_n)$  est décroissante .

**c.** En déduire que la suite  $(u_n)$  est convergente .

**d.** Calculer la limite de la suite  $(u_n)$  .

**10.**

On considère la fonction numérique  $f$  définie sur  $D_f = ]-\infty, -1[ \cup ]-1, +\infty[$  par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^4}{x^3 + x^2} ; \quad x \neq -1 \text{ et } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases} .$$

et soit  $(C_f)$  la courbe représentative de la fonction  $f$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  ( unité de 1 cm ).

**1.** ..

**a.** Calculer :  $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f(x)$  et  $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x)$  puis interpréter géométriquement les résultats .

**b.** Calculer :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x - 1)$  puis interpréter géométriquement les résultats .

**c.** Calculer :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  .

**d.** Montrer que  $(C_f)$  admet au voisinage de  $-\infty$  une asymptote oblique au voisinage de  $-\infty$  dont on déterminera son équation .

**e.** Etudier la position relative de la courbe  $(C_f)$  et la droite  $(D)$  d'équation  $y = x - 1$  sur  $D_f$  .

**2.**

**a.** Calculer :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$  puis interpréter géométriquement le résultat .

**b.** Calculer  $f'(x)$  pour tout  $x$  de  $]-\infty, -1[ \cup ]-1, 0[ \cup ]0, +\infty[$  puis vérifier que  $f'(x) = \frac{x^5(x+2)}{(x^3 + x^2)^2}$ .



c. Etudier le signe de  $f'(x)$  sur  $]-\infty, -1[ \cup ]-1, 0[ \cup ]0, +\infty[$  .

d. dresser le tableau de variations de la fonction  $f$  sur  $D_f$  .

e. Ecrire l'équation réduite de la tangente à  $(C_f)$  au point  $x_0 = 0$  .

**3.** ..

a. Vérifier que :  $f(x) - (x-1) = \frac{x^3}{x^3 + x^2}$  puis en déduire la position de la courbe  $(C_f)$  et la droite  $(D)$  .

b. Etudier l'intersection de la droite  $(\Delta)$  d'équation :  $y = x$  et la courbe  $(C_f)$  .

c. Construire dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  la droite  $(D)$  et la courbe  $(C_f)$  . ( unité de 1 cm ) .

**4.** On considère  $g$  la restriction de la fonction  $f$  sur  $I = ]-1, 0]$  .

a. Montrer que la fonction  $g$  admet une fonction réciproque  $g^{-1}$  définie sur l'intervalle  $J$  dont le déterminera .

b. Construire dans le même repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  la courbe représentative  $(C_{g^{-1}})$  de la fonction  $g^{-1}$  .

c. Calculer  $g\left(\frac{1}{2}\right)$  puis montrer que : la fonction réciproque  $g^{-1}$  est dérivable en  $\frac{1}{6}$  .

d. Calculer :  $(g^{-1})'\left(\frac{1}{6}\right)$  .

**5.** Soit  $(u_n)$  la suite numérique définie par  $u_0 = 1$  et  $u_{n+1} = g(u_n)$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$  .

a. Montrer par récurrence que :  $0 \leq u_n \leq 1$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$  .

b. Montrer que la suite  $(u_n)$  est décroissante .

c. En déduire que la suite  $(u_n)$  est convergente .

d. Calculer la limite de la suite  $(u_n)$  .