

Définition :

✓ On dit que f est dérivable en a si : $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell \in \mathbb{R}$

→ Le nombre ℓ est appelé le nombre dérivé de f en a et noté $f'(a)$

Dérivabilité à droite - Dérivabilité à gauche

✓ On dit que f est dérivable à droite en a si $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell \in \mathbb{R}$

→ ℓ est appelé le nombre dérivé de f à droite en a et noté $f'_d(a)$

✓ On dit que f est dérivable à gauche en a si $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell' \in \mathbb{R}$

→ ℓ' est appelé le nombre dérivé de f à gauche en a et noté $f'_g(a)$

Propriété

f dérivable à droite et à gauche en a } $\Leftrightarrow f$ est dérivable en a
et $f'_d(a) = f'_g(a)$

L'équation de la tangente à (Cf)

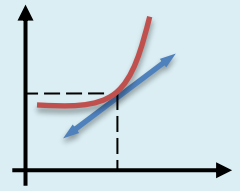
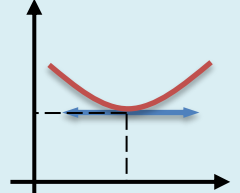
✓ L'équation de la tangente à la courbe (Cf) au point d'abscisse a est : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$

Fonction affine tangente à f

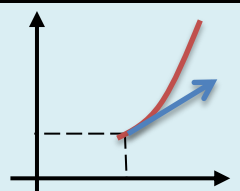
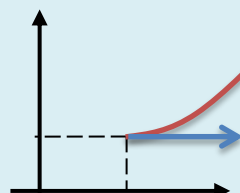
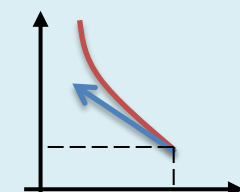
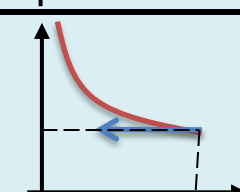
Si f est dérivable en a , la fonction $x \rightarrow f'(a)(x - a) + f(a)$ est appelée la fonction affine tangente à f en a .
Autrement dit : Si $x \simeq a$: $f(x) \simeq f'(a)(x - a) + f(a)$

Interprétation géométrique de la dérivation

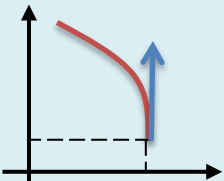
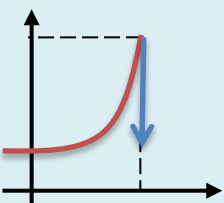
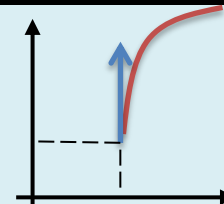
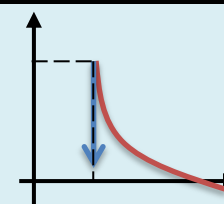
❖ f est dérivable en a

La limite	Interprétation géométrique	Représentation graphique (en exemple)
$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l \in \mathbb{R}^*$ $f'(a) = l$	(Cf) admet une tangente au point $A(a, f(a))$ d'équation $y = f'(a)(x - a) + f(a)$	
$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = 0$ $f'(a) = 0$	(Cf) admet une tangente horizontale au point $A(a, f(a))$	

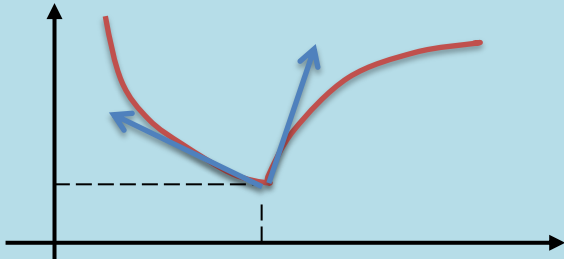
❖ f dérivable à gauche ou à droite en a

La limite	Interprétation géométrique	Représentation graphique (en exemple)
$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l \in \mathbb{R}^*$ $f'_d(a) = l$	(Cf) admet une demi tangente à droite au point $A(a, f(a))$ d'équation $\begin{cases} y = f'_d(a)(x - a) + f(a) \\ x \geq a \end{cases}$	
$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = 0$ $f'_d(a) = 0$	(Cf) admet une demi tangente horizontale à droite au point $A(a, f(a))$	
$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l \in \mathbb{R}^*$ $f'_g(a) = l$	(Cf) admet une demi tangente à gauche au point $A(a, f(a))$ d'équation $\begin{cases} y = f'_g(a)(x - a) + f(a) \\ x \leq a \end{cases}$	
$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = 0$ $f'_g(a) = 0$	(Cf) admet une demi tangente horizontale à gauche au point $A(a, f(a))$	

❖ f n'est pas dérivable en a

La limite	Interprétation géométrique	Représentation graphique (en exemples)
$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = +\infty$	(Cf) admet une demi tangente à droite au point $A(a, f(a))$ dirigée vers le haut	
$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = -\infty$	(Cf) admet une demi tangente à droite au point $A(a, f(a))$ dirigée vers le bas	
$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = -\infty$	(Cf) admet une demi tangente à gauche au point $A(a, f(a))$ dirigée vers le haut	
$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = +\infty$	(Cf) admet une demi tangente à gauche au point $A(a, f(a))$ dirigée vers le bas	

❖ Point anguleux :

f est dérivable à droite et à gauche en , mais $f'_d(a) \neq f'_g(a)$	(Cf) admet deux demi tangentes en $A(a, f(a))$ Le point $A(a, f(a))$ est appelé point anguleux
	

Dérivabilité des fonctions usuelles

- ✓ toute fonction polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$.
- ✓ toute fonction rationnelle est dérivable sur tout intervalle de son domaine de définition.
- ✓ La fonction $x \rightarrow \sqrt[n]{x}$ est dérivable sur $]0; +\infty[$. ($n \in \mathbb{N}^*$)
- ✓ Les fonctions $x \rightarrow \sin x$ et $x \rightarrow \cos x$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$.
- ✓ La fonction $x \rightarrow \tan x$ est dérivable en tout point de $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Opérations sur les fonctions dérivables

Soient f et g deux fonctions dérivables sur I et $k \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, alors :

- > $f + g$, fg , kf , f^n sont dérivables sur I .
- > Si g ne s'annule pas sur I , alors $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont dérivables sur I .
- > Si $f > 0$ sur I , alors $\sqrt[n]{f}$ est dérivable sur I .

{ → Voir la formulaire de dérivée page suivante }

Dérivée de la composée de deux fonction :

Si f est dérivable sur I et g est dérivable sur $f(I)$, alors la fonction $g \circ f$ est dérivable sur I

$$\forall x \in I \quad (g \circ f)'(x) = f'(x) \times g'(f(x))$$

Dérivée de la fonction réciproque :

I) Si f est dérivable en a et $f'(a) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable en $b = f(a)$

Et $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$

II) Si f est dérivable sur I et f' ne s'annule pas sur I alors f^{-1} est dérivable sur $J = f(I)$

Et $(\forall x \in J) ; (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

La dérivation et la monotonie

$$k \in \mathbb{R} \quad n \in \mathbb{N}^*$$

f est croissante sur I	$\forall x \in I \quad f'(x) \geq 0$
f est décroissante sur I	$\forall x \in I \quad f'(x) \leq 0$
f est constante sur I	$\forall x \in I \quad f'(x) = 0$

Extremums d'une fonction

Si f' s'annule en a en changeant de signe alors f admet un extremum en a

x	α
$f'(x)$	- 0 +
$f(x)$	

β Valeur minimale

x	α
$f'(x)$	+ 0 -
$f(x)$	

β valeur maximal

Formulaire de dérivées

Dérivée des fonctions usuelles	Opérations sur les fonction dérivées
$(a)' = 0$	$(af)' = af'$
$(x)' = 1$	$(f + g)' = f' + g'$
$(ax)' = a$	$(fg)' = f'g + fg'$
$(x^n)' = nx^{n-1}$	$\left(\frac{1}{f}\right)' = \frac{-f'}{f^2}$
$\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{-1}{x^2}$	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\sqrt{f})' = \frac{f'}{2\sqrt{f}}$
$(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n} \times \frac{1}{\sqrt[n]{x}^{n-1}}$	$(f^n)' = nf' f^{n-1}$
$\cos'(x) = -\sin(x)$	$(\sqrt[n]{f})' = \frac{1}{n} \frac{f'}{\sqrt[n]{f}^{n-1}}$
$\sin'(x) = \cos(x)$	$(fog)' = g' \times f'og$
$\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$ $= \frac{1}{\cos^2(x)}$	$(f^{-1})' = \frac{1}{f'of^{-1}}$

(avec $a \in \mathbb{R}$ et f et g deux fonctions numériques)