Dérivabilité d'une fonction en un point :

On dit que la fonction f est dérivable en x_0 si : $\lim_{x \mapsto x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l = f'(x_0)$, *avec* $l \in \mathbb{R}$.

Le nombre réel $f'(x_0)$ s'appelle nombre dérivé de la fonction f au point x_0.

Interprétation géométrique :

Soit f une fonction dérivable en x_0 donc la courbe $(\mathscr{C}_f)$ admet une tangente (Δ) au point $A(x_0, f(x_0))$ d'équation : $(\Delta):\ y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$.

Dérivabilité à droite - dérivabilité à gauche :

- *On dit que la fonction f est dérivable à droite en x_0 si :*

$$\lim_{x \mapsto x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l' = f_d'(x_0) \quad , \text{ avec } l' \in \mathbb{R}.$$

- *On dit que la fonction f est dérivable à gauche en x_0 si :*

$$\lim_{x \mapsto x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l'' = f_g'(x_0) \quad , \text{ avec } l'' \in \mathbb{R}.$$

✸ *Si :* $f_d'(x_0) = f_g'(x_0)$ *donc la fonction f est dérivable en x_0.*

Interprétation géométrique : *La courbe $(\mathscr{C}_f)$ admet une tangente (Δ) au point $A(x_0; f(x_0))$ d'équation :* $(\Delta):\ y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$.

✸ *Si :* $f_d'(x_0) \neq f_g'(x_0)$ *donc la fonction f n'est pas dérivable en x_0.*

Interprétation géométrique : *La courbe $(\mathscr{C}_f)$ admet au point $A(x_0; f(x_0))$ deux demi-tangente (T_1) à droite et (T_2) à gauche d'équations :*

$(T_1):\ y = f_d'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ et $(T_2):\ y = f_g'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$.

✸ *Si :* $\lim_{x \mapsto x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty$ *ou* $\lim_{x \mapsto x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = -\infty$ *donc la fonction f n'est pas dérivable en x_0.*

Interprétation géométrique : *La courbe $(\mathscr{C}_f)$ admet au point $A(x_0; f(x_0))$ une demi-tangente verticale dirigée vers les ordonnées positives.*

✸ *Si :* $\lim_{x \mapsto x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = -\infty$ *ou* $\lim_{x \mapsto x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty$ *donc la fonction f n'est pas dérivable en x_0.*

Interprétation géométrique : *La courbe $(\mathscr{C}_f)$ admet au point $A(x_0; f(x_0))$ une demi-tangente verticale dirigée vers les ordonnées négatives.*

Opérations sur les fonctions dérivables :

✸ *Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I et α un nombre réel.*

Alors : $(f \pm g)' = f' \pm g'$; $(f \times g)' = f' \times g + f \times g'$; $(\alpha f)' = \alpha f'$

et $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$: $(f^n)' = n \times f' \times f^{n-1}$.

✸ *Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I et* $(\forall x \in I):\ g(x) \neq 0$.

Alors : $\left(\dfrac{a}{g}\right)' = -\dfrac{a \times g'}{g^2}$; $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f' \times g - f \times g'}{g^2}$.

✸ Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et $(\forall x \in I) : f(x) \succ 0$.

Alors : $\left(\sqrt{f}\right)' = \dfrac{f'}{2\sqrt{f}}$; $\left(\sqrt[n]{f}\right)' = \dfrac{f'}{n\left(\sqrt[n]{f}\right)^{n-1}}$.

✸ Soient f et g deux fonctions dérivables respectivement sur deux intervalles I et J, tel que $f(I) \subset J$. Alors la fonction composée $g o f$ est dérivable sur I, et on a :

$$(\forall x \in I) : (g o f)'(x) = f'(x) \times (g' o f)(x).$$

✸ Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, tel que $(\forall x \in I) : f'(x) \neq 0$, alors la fonction f^{-1} est dérivable sur $f(I) = J$. De plus, on a pour tout $x \in J$: $\left(f^{-1}\right)'(x) = \dfrac{1}{f'\left[f^{-1}(x)\right]}$.

Dérivabilité et variations d'une fonction :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

✸ Si $(\forall x \in I) : f'(x) = 0$, alors f est constante sur I.

✸ Si $(\forall x \in I) : f'(x) \geq 0$, alors f est croissante sur I.

✸ Si $(\forall x \in I) : f'(x) \leq 0$, alors f est décroissante sur I.

Dérivabilité et extremums d'une fonction :

✸ On dit que $f(x_0)$ est un extremum local de f sur un intervalle I, si $f(x_0)$ est un minimum ou maximum local de f en x_0 un intervalle I.

✸ f est un fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et x_0 est un réel de I.

si $f(x_0)$ est un extremum local de f en x_0 alors $f'(x_0) = 0$.

Donc la courbe $(\mathscr{C}_f)$ admet au point $A(x_0; f(x_0))$ une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

Concavité et point d'inflexion :

Soit f une fonction numérique, à variable réel deux fois dérivable sur un intervalle ouvert I. et x_0 un élément de I.

✸ Si $(\forall x \in I) : f''(x) \geq 0$, alors la courbe $(\mathscr{C}_f)$ tourne sa concavité vers les ordonnées positives.

✸ Si $(\forall x \in I) : f''(x) \leq 0$, alors la courbe $(\mathscr{C}_f)$ tourne sa concavité vers les ordonnées négatives.

✸ Si $(\exists x_0 \in I) : f''(x_0) = 0$ en changeant de signe, alors le point $A(x_0; f(x_0))$ est un point d'inflexion de la courbe $(\mathscr{C}_f)$.

Eléments de symétrie d'une courbe :

✸ Le point $\Omega(a;b)$ est un centre de symétrie de la courbe $(\mathscr{C}_f)$ si et seulement si :

- ♣ $(\forall x \in D_f)$: $(2a - x) \in D_f$.
- ♣ $f(2a - x) + f(x) = 2b$.

✸ La droite d'équation $x = a$ est un axe de symétrie de la courbe $(\mathscr{C}_f)$ si et seulement si :

- ♣ $(\forall x \in D_f)$: $(2a - x) \in D_f$.
- ♣ $f(2a - x) = f(x)$.