TD : Exercices : Limite et continuité
Exercices d'applications et de réflexions

PROF: ATMANI NAJIB 2BAC BIOF: PC et SVT

TD :Exercices: LIMITE ET CONTINUITE

Exercice1 : Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+3}+1}{2x-1}$ 2) $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^3+x^2-x+4$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+5x^2-7x^4}{x-10x^2+14x^3}$ 4) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x+8x^2-2x^5}{x^2+2x^6}$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x}-x$ 6) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\tan x-1}{x-\frac{\pi}{4}}$

Exercice2 : (*Limites à droite et à gauche*)

Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{(x+1)^2}{|x^2-1|}$

Etudier la limite de f en $x_0=-1$

Exercice3 : Soient les fonctions tels que :

$f(x)=\sqrt{2x+1}\left(-3x^2+x\right)$ et $g(x)=\dfrac{-2x^2+1}{(x-3)^2}\left(\sqrt{x}+1\right)$

$k(x)=\dfrac{-3x+1}{x(x-2)}$ et $h(x)=\dfrac{x^2+1}{x^3}\sin x$

1)Déterminer : $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2)Déterminer : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to 3} g(x)$

3)Déterminer : $\lim\limits_{x\to 0} h(x)$

4)Déterminer les limites aux bornes du domaine de définition de k

Exercice4 : Considérons la fonction f définie

par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2-6x+5}{x-1};si...x\neq 1\\ f(1)=-4\end{cases}$

1) Déterminer Df 2) a) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

b) Comparer $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ et $f(1)$

Exercice5 : Considérons la fonction f définie par

$f(x)=\dfrac{x^2+x-12}{x-3}$; $si\ x\neq 3$ et $f(3)=7$

Etudier la est continuité de f en $x_0=3$

Exercice6 : Considérons la fonction f définie

Par : $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\tan x}$; $si\ x\neq 0$ et $f(0)=\frac{1}{2}$

Etudier la est continuité de f en $x_0=0$

Exercice7 : Considérons la fonction f définie

Par : $f(x)=\dfrac{\sin(x-2)}{x^2-2x}$; $si\ x\neq 0$ et $x\neq 2$ et $f(2)=\frac{1}{2}$

Etudier la est continuité de f en $x_0=2$

Exercice8 : Considérons la fonction f définie

Par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sin(\pi x)}{x-1};si...x\neq 1\\ f(1)=m\end{cases}$

avec m paramètre réel

déterminer la valeur du réel m pour laquelle

f est continue en $x_0=1$

Exercice9 : Considérons la fonction f définie par

$f(x)=2+x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$; $si\ x\neq 0$ et $f(0)=2$

Etudier la est continuité de f en $x_0=0$

Exercice10 : Soit f définie sur **R** par :

$\begin{cases} f(x)=x^2;si...x\leq 0\\ f(1)=2+x;si...x\succ 0\end{cases}$

Etudier la est continuité de f en $x_0=0$

Exercice11 : Soit f définie par :

$\begin{cases} f(x)=3-x^2;si...x\leq 0\\ f(x)=\dfrac{x^2-3}{2x-1};si...x\succ 0\end{cases}$

Etudier la est continuité de f en $x_0=0$

Exercice12 : Considérons la fonction f définie

Par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{2x+1}{7-3x};si...x\leq 2\\ f(x)=\dfrac{x^2+x-6}{x-2};si...x\succ 2\end{cases}$

Etudier la est continuité de f en $x_0=2$

Exercice13 : Soit la fonction :

$f : x \mapsto \dfrac{x^2-1}{|x-1|}$ si $x \neq 1$ et $f(1) = 2$

Etudier la la continuité de f en $x_0 = 1$

Exercice14 :: Soit la fonction h définie par

$$f(x) = \frac{x^3+1}{x^2+3x+2}$$

1- Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.

2- Déterminer la limite $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$, f est-elle continue en $x_0 = -1$?

3- Soit la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = f(x); si...x \neq -1 \\ f(-1) = 3 \end{cases}$$

a) Déterminer D_f

b) Etudier la continuité de la fonction f en $x_0 = -1$ La fonction f s'appelle un prolongement par continuité de la fonction de f en -1

4- Peut-on prolonger f par continuité en $a = -2$

Exercice15 : Soit f une fonction définie par

$f(x) = \dfrac{1-\cos x}{x}$ Donner un prolongement par continuité de la fonction f en $x_0 = 0$

Exercice 16 : Etudier la la continuité des $f$onctions suivantes :

1) $h(x) = \sqrt{x^2+x+3}$ 2) $g(x) = \dfrac{x^4+x^3-6}{x^2+2x-3}$

3) $t(x) = \tan x$

Exercice 17 : Etudier la la continuité des $f$onctions suivantes :

1) $f(x) = \cos(2x^2-3x+4)$

2) $g(x) = \sqrt{\dfrac{x}{1+\sin^2 x}}$ 3) $h(x) = \sin\left(\dfrac{1}{x^2+1}\right)$

Exercice 18 : Déterminer les limites suivantes :

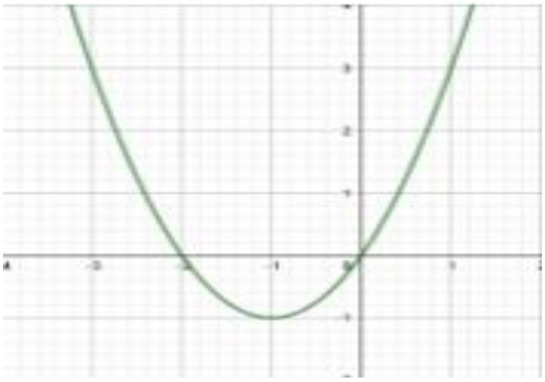
1) $\lim\limits_{x\to 0} \sin\left(\dfrac{1-\cos x}{x^2}\pi\right)$ 2) $\lim\limits_{x\to +\infty} \cos\left(\pi\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}\right)$

Exercice19 : Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to 0} \cos\left(\dfrac{\pi \tan x}{3x}\right)$ 2) $\lim\limits_{x\to +\infty} \sin\left(\dfrac{\pi x^2-4x+3}{4x^2+7}\right)$

3) $\lim\limits_{x\to 0} \sin\sqrt{\dfrac{2x^2}{1-\cos x}}$

Exercice20 : Le graphe ci-contre est le graphe de la fonction $f(x) = x^2+2x$



Déterminer graphiquement les images des intervalles : $[-1,2]$, $[0,2[$; $]-1,0]$

$[2,+\infty[$; $]-\infty,1]$

Exercice21 : Soit f une fonction définie par

$$f(x) = \frac{2x-3}{x+1}$$

Déterminer les images des intervalles suivants : [0,1] ; [−2,-1[;] − 1, 1] ; [2, +∞[

Exercice22 : Montrer que l'équation :

$4x^3 - 3x - \dfrac{1}{2} = 0$ admet une racine dans chacune des intervalles suivants : $\left]-1;-\dfrac{1}{2}\right[$; $\left]-\dfrac{1}{2};0\right[$ et $]0;1[$

Exercice23 : Montrer que l'équation :

$x^3+x+1=0$

Admet une racine unique dans $]-1;0[$

Exercice24 : Montrer que l'équation : $\cos x = x$ Admet au moins une racine dans intervalle :

$I = [0;\pi]$

Exercice25 : Montrer que l'équation : $1+\sin x = x$ Admet au moins une racine dans intervalle :

$I = \left[\dfrac{\pi}{2};\dfrac{2\pi}{3}\right]$

Exercice26 : on considère la fonction : f tel que

$f(x) = x^3+x-1$

1) Montrer que l'équation : $f(x) = 0$ admet une solution unique α sur $\mathbb{R}$

2) Montrer que l'équation : $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in]0;1[$

3) étudier le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$

Exercice27 : Soit f la fonction définie par :

$f(x)=\dfrac{x-3}{x+2}$

1) Montrer que la fonction g la restriction de f sur intervalle $I=]-2;+\infty[$ admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un J qu'il faut déterminer.

2) Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout x de l'intervalle J

Exercice 28: Soit f la fonction définie sur $I=\left[\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ par : $f(x)=\sqrt{2x-1}$

1) Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un J qu'il faut déterminer.

2) Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout x de l'intervalle J

3)Représenter (C_f) et $(C_{f^{-1}})$ dans le même repére orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$

Exercice29 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $x^5=32$ **2)** $x^7=-128$ **3)** $x^4=3$ **4)** $x^6=-8$

Exercice30 : simplifier les expressions suivantes :1) $\left(\sqrt[3]{2}\right)^3$ 2) $\sqrt[2]{\sqrt[4]{2}}$

3) $A=\sqrt[5]{32}-\left(\sqrt[7]{2}\right)^7+\sqrt[3]{\sqrt[3]{512}}+\dfrac{\sqrt[5]{96}}{\sqrt[5]{3}}$

4) $B=\dfrac{\sqrt[3]{2}\times\sqrt[5]{16}\times\sqrt{\sqrt[3]{4}}\times\sqrt[15]{2}}{\sqrt[15]{256}}$

5) $C=\dfrac{(27)^{\frac{2}{9}}\times(81)^{\frac{1}{4}}\times9^{\frac{5}{2}}}{3^{\frac{17}{3}}}$ 6) $D=\sqrt[6]{\dfrac{2^5\times128000000}{27^2}}$

7) $E=\dfrac{\sqrt[5]{2}\times\sqrt{8}}{\sqrt{\sqrt[5]{128}}}$ 8) $F=\dfrac{\sqrt[3]{4}\times\sqrt{8}\times\left(\sqrt{\sqrt{2}}\right)^2}{\sqrt{\sqrt[3]{4}}}$

Exercice31 : comparer : $\sqrt[5]{2}$ et $\sqrt[7]{3}$

Exercice 32 : résoudre dans $\mathbb{R}$:

1) $\sqrt[5]{3x-4}=2$ 2) $\left(\sqrt[5]{x}\right)^2-5\sqrt[5]{x}+6=0$

Exercice 33 : calcules les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to2}\sqrt[5]{x^3+24}$ 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^5+2x^3-x+4}$

3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}$ 4) $\lim\limits_{x\to8}\dfrac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8}$

5) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{2x+6}-\sqrt{x+3}}{x-1}$ 6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x^2-2}}$

7) $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\sqrt[4]{x^2-1}}{\sqrt{x-1}}$

Exercice34 : simplifier les expressions suivantes :1) $A=\dfrac{\sqrt[3]{1024}\times\sqrt[5]{3200000}}{\sqrt[4]{64}\times\sqrt[3]{\sqrt{252}}\times\sqrt{18}}$

2) a)comparer : $\sqrt[5]{4}$ **et** $\sqrt[4]{3}$

b) comparer : $\sqrt[3]{28}$ et $\sqrt{13}$

c) comparer : $\sqrt[5]{23}$ et $\sqrt[15]{151}$

Exercice35 :1) Rendre le dénominateur rationnel

$a=\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}-2}$ $b=\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}$ $c=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{5}}$

$d=\dfrac{1}{\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4}}$

2) Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3x+1}}{\sqrt[3]{x}-1}$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^3+1}-x$

Exercice36 : Déterminer la limite suivante :

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[4]{20x^2-4}-2}{2x^2+x-3}$

Exercice37: 1)simplifier les expressions suivantes : $A=\dfrac{\sqrt[15]{3^5}\times\sqrt[3]{9}\times\left(\sqrt[5]{9}\right)^3}{\sqrt[5]{3}}$

et $B=\dfrac{\sqrt[4]{9}\times\sqrt{\sqrt[3]{3^3}\times\sqrt{9}}}{\sqrt[5]{81}\times\sqrt{\sqrt{\sqrt{3}}}}$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

a) $\sqrt[3]{x-1}=3$ b) $x^{\frac{2}{3}}-7x^{\frac{1}{3}}-8=0$

c) $\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}-12=0$

2)Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[5]{x^5+x^2+1}$ b) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$

c) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{\sqrt[3]{x+1}-1}$

Exercice38 : Considérons la fonction f définie par : $f(x)=x\cos\dfrac{1}{x}$; $si\ x\neq0$ et $f(0)=0$

1)Etudier la continuité de f en $x_0 = 0$

2) Etudier la continuité de f sur les intervalles $]0;+\infty[$ et $]-\infty;0[$ et est ce f est continue sur $\mathbb{R}$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

Exercice39 : soient f et g sont deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ tels que f est bornée et g continue sur $\mathbb{R}$;Montrer que $f\circ g$ et $g\circ f$ sont bornées sur $\mathbb{R}$

Exercice 40: Considérons la fonction f continue Sur l'intervalle $[a;b]$ et x_1 et x_2 et x_3 des nombres de l'intervalle $[a;b]$

Montrer que l'équation :

$3f(x) = f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)$ admet au moins une solution dans $[a;b]$

Exercice41 : soient f et g sont deux fonctions continues sur $[a;b]$ tels que :

$0 \prec g(x) \prec f(x) \quad \forall x\in[a;b]$

Montrer que :

$\exists\lambda\in\mathbb{R}_+^* / \forall x\in[a;b];(1+\lambda)g(x)\le f(x)$

Exercice 42: Considérons la fonction f continue Sur l'intervalle $[a;b]$ tel que : $f(a)\prec 0$

il existe $x_0\in]a;b[$ tel que : $f(x_0)=\dfrac{a-x_0}{b-x_0}$

Exercice 43 : Soit la fonction $f(x)=x^2+x+1$ définie sur $\mathbb{R}$.

1- Déterminer $J = f([0,1])$

2- Montrer que f admet une fonction réciproque de J vers [0,1] et déterminer $f^{-1}(x)\ \forall x\in J$

Exercice 44 : Soit la fonction $g(x)=x-2\sqrt{x}$ définie sur $\mathbb{R}^+$.

1- Montrer que g est strictement croissante sur $[1, +\infty[$ puis déterminer $J = g([1, +\infty[)$

2- Montrer que g admet une fonction réciproque de J vers $[1, +\infty[$ et déterminer $g^{-1}(x)\ \forall x\in J$

Exercice 45 : Soit la fonction $h(x)=\dfrac{x}{1-x^2}$

Montrer que h est une bijection de$]-1,1[$ vers un intervalle J qu'il faut déterminer et déterminer et déterminer $h^{-1}(x)\ \forall x\in J$

Exercice 46 :

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation: $\sqrt[3]{x}-x=0$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :
$\sqrt[3]{x}-5\sqrt[6]{x}+6=0$
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation :
$\sqrt[3]{x-1}-\sqrt[3]{x-2}\succ 1$

Exercice 47:

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $x^4=16$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $(x-1)^3=-27$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe. C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices Que l'on devient un mathématicien