

Exercice 1 :

① - Simplifier les nombres suivants :

$$A = \frac{\sqrt[3]{7^2} \times \sqrt[4]{7} \times \sqrt[5]{7^4}}{(\sqrt[6]{7^5})^2} \quad ; \quad B = \frac{\sqrt[3]{4} \times \sqrt{8} \times \sqrt[5]{2}}{\sqrt[4]{2^3} \times \sqrt[12]{2}} \quad ; \quad C = \frac{\sqrt[4]{2048} \times \sqrt[4]{160000}}{\sqrt[8]{4096} \times \sqrt[3]{\sqrt{256} \times \sqrt{512}}}.$$

② - Ordonner dans l'ordre croissant les nombres : $A = \sqrt{2}$; $B = \sqrt[3]{3}$; $C = \sqrt[4]{5}$; $D = 7^{\frac{1}{6}}$ et $E = 14^{\frac{1}{12}}$

③ - Calculer les limites suivantes :

$$\begin{aligned} a - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + x + 2} + 3x - 5}{2x^2 - 5x + 3} \quad ; \quad b - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1} \quad ; \quad c - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x^2 + 1} - 1}{x^2} \quad ; \quad d - \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt[3]{x + 22} - 3}{x^2 - 6x + 5} . \\ e - \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{2x + 4} - \sqrt[3]{5x - 2}}{x - 2} \quad ; \quad f - \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{\sqrt[3]{x + 56} - 4} \quad ; \quad g - \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt[3]{x} - 1} \quad ; \quad h - \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{\sqrt{x - 3}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x - 3}} . \\ i - \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2x^2 - 4x + 1} - x + 3 \quad ; \quad j - \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^2 - 2x - 3} - \sqrt[3]{x^2 + 1} \quad ; \quad k - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 + x + 1}}{x} . \\ l - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x + 1} - \sqrt{x + 1}}{\sqrt[4]{x + 1} - \sqrt{x + 1}} \quad ; \quad m - \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3 + 4x + 2} + \sqrt{x^3 - 5x^2 + 1} - 2x . \end{aligned}$$

Exercice 2 :

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :
$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x - 1} + 3 & ; x \geq 1 \\ f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} & ; x < 1 \end{cases}$$

① - a - Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f .

b - Calculer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

② - Etudier la continuité de la fonction f aux points $x_0 = 1$.

③ - Etudier la continuité de la fonction f sur \mathbb{R} .

④ - Soit g la restriction de f à l'intervalle $]1; +\infty[$.

a - Montrer que la fonction g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer .

b - Calculer $(\forall x \in J) : g^{-1}(x)$.

c - Résoudre dans J l'équation : $g^{-1}(x) = 2$.

Exercice 3 :

On considère la fonction f définie par : $f(x) = 2 - \sqrt[3]{x^2 - 1}$.

① - a - Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f .

b - Calculer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

② - Etudier la continuité de la fonction f sur D_f .

③ - Etudier les variations de f sur D_f .

④ - On considère l'équation : $(E): f(x) = x$.

a - Montrer que l'équation (E) admet une unique solution α dans l'intervalle $]1;2[$.

b - Montrer que : $2 - \alpha = \sqrt[3]{\alpha^2 - 1}$.

c - Donner un encadrement de α d'amplitude 5×10^{-1} .

⑤ - Soit g la restriction de f à l'intervalle $[1; +\infty[$.

a - Montrer que la fonction g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer

b - Déterminer $g^{-1}([0;1])$.

c - Calculer $(\forall x \in J): g^{-1}(x)$.

🐞 Exercice 4 :

On considère la fonction g définie par : $g(x) = (x-1)^3 + 2$.

① - Etudier la continuité de la fonction g sur \mathbb{R} .

② - Etudier les variations de la fonction g sur \mathbb{R} .

③ - Montrer que la fonction g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

④ - Déterminer $g^{-1}([-6;2])$.

⑤ - Calculer $(\forall x \in J): g^{-1}(x)$.

🐞 Exercice 5 :

Soit f la fonction définie sur $]-\infty;0]$ par : $f(x) = \frac{x^2 + 2}{2x^2 + 1}$.

① - Etudier la continuité de la fonction f sur $]-\infty;0]$.

② - Etudier les variations de la fonction f sur $]-\infty;0]$.

③ - Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

④ - Calculer $(\forall x \in J): f^{-1}(x)$.

⑤ - Montrer que l'équation $f(x) = \sqrt{2}$ admet une unique solution α dans l'intervalle $\left] \frac{-2}{3}; \frac{-1}{2} \right[$.

⑥ - Dédurre que : $\frac{1}{2} < \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-1}} < \frac{2}{3}$.