

Continuité en un point:



- f est continue en $a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$
- f est continue à droite en $a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$
- f est continue à gauche en $a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$

Propriété f est continue en $a \Leftrightarrow f$ est continue à droite et à gauche en a

Continuité sur un intervalle :

- ✓ f est continue sur $]a, b[$ s'elle est continue en tout point de $]a, b[$
- ✓ f est continue sur $[a, b]$ s'elle est continue sur $]a, b[$ et continue à droite en a et continue à gauche en b

Continuité des fonctions usuelles:

- Tout fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$
- Toute fonction rationnelle est continue sur chaque intervalle de son domaine de définition
- $x \rightarrow \sqrt{x}$ est continue sur $[0, +\infty[$
- $x \rightarrow \sin x$ et $x \rightarrow \cos x$ sont continues sur $\mathbb{R}$
- $x \rightarrow \tan x$ est continue sur chaque intervalle de son domaine de définition.

Opération sur les fonctions continues :

Si f et g sont continues sur I

- alors les fonctions $f + g$ et $f - g$ et $f \times g$ et αf sont continues sur I , ($\alpha \in \mathbb{R}$)
- si de plus g ne s'annule pas sur I alors $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continues sur I

L'image d'un intervalle par une fonction continue

L'intervalle I	L'intervalle $f(I)$	
	f strictement croissante sur I	f strictement décroissante sur I
$[a, b]$	$[f(a), f(b)]$	$[f(b), f(a)]$
$]a, b[$	$\left] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x), \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) \right[$	$\left] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x), \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \right[$
$[a, b[$	$\left[f(a), \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) \right[$	$\left] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x), f(a) \right[$
$]a, b]$	$\left] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x), f(b) \right]$	$\left[f(b), \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \right]$
$[a, +\infty[$	$\left[f(a), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[$	$\left] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(a) \right]$
$]a, +\infty[$	$\left] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[$	$\left] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \right[$
$] -\infty, b]$	$\left] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(b) \right]$	$\left[f(b), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right]$
$] -\infty, b[$	$\left] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) \right[$	$\left] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right[$
$] -\infty, +\infty[$	$\left] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[$	$\left] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right[$

Continuité de la composée de deux fonction :

Si f est continue sur I et g continue sur J tel que $f(I) \subset J$ alors $g \circ f$ est continue sur I

Résultats -si f est continue et positive sur I alors $\sqrt{f}$ est continue sur I .

-si f est continue sur I alors f^n est continue sur I . ($n \in \mathbb{N}^*$)

Théorème des valeurs intermédiaires:

$\left\{ \begin{array}{l} f \text{ est continue sur } [a, b] \\ \beta \text{ entre } f(a) \text{ et } f(b) \end{array} \right.$



$\exists \alpha \in [a, b] ; f(\alpha) = \beta$

Résultats :

- f continue sur $[a, b]$
- $f(a) \cdot f(b) < 0$



L'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution α dans $[a, b]$

- f continue et strictement monotone sur $[a, b]$
- $f(a) \cdot f(b) < 0$



L'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[a, b]$

La méthode de dichotomie

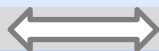
Est une méthode pour trouver une solution approchée à une équation $f(x)=0$. Précisément, supposons que la fonction f est continue sur l'intervalle $[a, b]$, avec $f(a)<0$ et $f(b)>0$. On sait donc qu'il existe au moins un réel c dans l'intervalle $[a, b]$ tel que $f(c)=0$.

L'idée est alors d'évaluer ce que vaut f au milieu de $[a, b]$, et de distinguer les deux cas suivants :

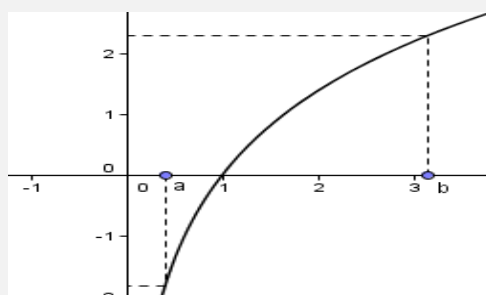
- si $f\left(\frac{a+b}{2}\right) > 0$, alors on sait qu'on a une racine dans l'intervalle $\left[a; \frac{a+b}{2}\right]$
- sinon, $f\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0$ et on sait qu'on a une racine dans l'intervalle $\left[\frac{a+b}{2}; b\right]$.

Ainsi, dans les deux cas, on a trouvé un intervalle de longueur moitié dans lequel est située une racine de l'équation $f(x)=0$. On recommence alors avec cet intervalle, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on trouve une approximation qui nous convienne

$$f(\alpha) = 0$$



(C_f) coupe l'axe des abscisses au point $A(\alpha, 0)$



Fonction réciproque

Propriétés :

- Si f continue et strictement monotone sur I
- Et $y \in f(I)$



L'équation $f(x) = y$ admet une seule solution dans I

Si f est continue et strictement monotone sur I alors f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $J = f(I)$.

$$f: I \rightarrow J \text{ et } f^{-1}: J \rightarrow I$$

$$\begin{cases} f^{-1}(x) = y \\ x \in J \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(y) = x \\ y \in I \end{cases}$$

$$(\forall x \in I), f^{-1} \circ f(x) = x$$

$$(\forall y \in J), f \circ f^{-1}(y) = y$$

- ✓ La fonction f^{-1} est continue sur J et a le même sens de variation de f sur I
- ✓ Les courbes (C_f) et $(C_{f^{-1}})$ sont symétriques par rapport à la droite $(D) : y = x$

La fonction racine $n^{\text{ième}}$: $(\sqrt[n]{})$, $n \in \mathbb{N}^*$

$$x \in \mathbb{R}_+ , \quad y \in \mathbb{R}_+$$

$$x^n = y \Leftrightarrow \sqrt[n]{y} = x$$

- ✓ La fonction $x \rightarrow \sqrt[n]{x}$ est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$
- ✓ Cas particuliers : $\sqrt[1]{x} = x$, $\sqrt[2]{x} = \sqrt{x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$

Propriétés : $x, y \in \mathbb{R}^+$; $n, m \in \mathbb{N}^*$

$$\sqrt[n]{x^n} = x ; \quad (\sqrt[n]{x})^n = x ; \quad (\sqrt[n]{x})^m = \sqrt[n]{x^m} ; \quad \sqrt[nm]{x^m} = \sqrt[n]{x}$$

$$\sqrt[n]{x} \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy} ; \quad \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\frac{x}{y}} \quad (y \neq 0) ; \quad \sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[nm]{x} ; \quad \sqrt[p]{x^{np}} = x^n$$

Limites :

$$\lim f(x) = +\infty \Rightarrow \lim \sqrt[n]{f(x)} = +\infty ; \quad \lim f(x) = \ell \geq 0 \Rightarrow \lim \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\ell}$$

$$a - b = \frac{a^3 - b^3}{a^2 + ab + b^2} \rightarrow \sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b} = \frac{a - b}{\sqrt[3]{a}^2 + \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{b}^2}$$

Continuité :

si f est une fonction continue et positive sur I alors $\sqrt[n]{f}$ est continue sur I

Puissance rationnelle d'un nombre réel strictement positif :

$n \in \mathbb{N}^*, m \in \mathbb{Z}$ Pour tout x de $]0, +\infty[$ on a : $x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$

$$x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x} \quad ; \quad x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$$

Propriété : $r, r' \in \mathbb{Q} \quad ; \quad x, y \in \mathbb{R}_+^*$

$$x^r \times x^{r'} = x^{r+r'} \quad , \quad (x^r)^{r'} = x^{r \times r'}$$

$$(xy)^r = x^r \times y^r \quad , \quad \left(\frac{x}{y}\right)^r = \frac{x^r}{y^r}$$

$$\frac{x^r}{x^{r'}} = x^{r-r'} \quad , \quad x^{-r} = \frac{1}{x^r}$$

« Tout le monde est un génie.
Mais si vous jugez un poisson
sur sa capacité à grimper
dans un arbre, il passera
sa vie entière à croire
qu'il est stupide. »

- Albert Einstein

