

Exercice 1 : (2023 SN) (3pts)

On a $B(2;1;2)$; $C(2;5;0)$; $A(0;1;4)$.

1) a) Montrer que : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 4(2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k})$

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= 8\vec{i} + 4\vec{j} + 8\vec{k}$$

D'où $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 4(2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k})$

b) En déduire l'aire de triangle ABC et la distance $d(B, (AC))$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| \text{ or } \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 4(2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k})$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \|4(2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k})\| = \frac{4}{2} \|2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}\|$$

$$\text{Donc } S_{ABC} = 2\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = 2\sqrt{9}$$

$$\text{D'où } S_{ABC} = 6$$

$$\text{On a } d(B, (AC)) = \frac{\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|}{\|\overrightarrow{AC}\|} = \frac{4\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}}{\sqrt{2^2 + 4^2 + (-4)^2}}$$

$$\text{Donc } d(B, (AC)) = \frac{4\sqrt{9}}{\sqrt{36}} = 2 \text{ d'où } d(B, (AC)) = 2$$

2) Soit D le milieu du segment $[AC]$

$$\text{a) Vérifier que : } \overrightarrow{D}\Omega = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC})$$

D est le milieu du segment $[AC]$

$$\text{Donc } D\left(\frac{0+2}{2}; \frac{1+5}{2}; \frac{4+0}{2}\right) \text{ donc } D(1; 3; 2)$$

Or $\Omega(3; 4; 4)$ donc $\overrightarrow{D}\Omega(2; 1; 2)$ donc $\overrightarrow{D}\Omega = 2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$

$$\text{Or } \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 4(2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}) \text{ donc } \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 4\overrightarrow{D}\Omega$$

$$\text{D'où } \overrightarrow{D}\Omega = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC})$$

b) En déduire que $d(\Omega, (ABC)) = 3$

On a $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est normal au plan (ABC) .

Et puisque $\overrightarrow{D}\Omega = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC})$ donc $\overrightarrow{D}\Omega$ est normal au plan (ABC) donc $(D\Omega) \perp (ABC)$

Or D est le milieu du segment $[AC]$ donc $D \in (ABC)$

Donc D est la projection orthogonale de Ω sur (ABC)

Donc $d(\Omega, (ABC)) = D\Omega$ or $\overrightarrow{D}\Omega = 2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$

$$\text{Donc } D\Omega = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$\text{D'où } d(\Omega, (ABC)) = 3$$

3) Soit (S) la sphère d'équation :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 8y - 8z + 32 = 0$$

a) Déterminer le centre et le rayon de (S).

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 8y - 8z + 32 = 0$$

$$\mathbf{a} = \frac{-6}{-2}; \quad \mathbf{b} = \frac{-8}{-2}; \quad \mathbf{c} = \frac{-8}{-2}; \quad \mathbf{d} = 32$$

$$\text{Donc } \mathbf{a} = 3; \quad \mathbf{b} = 4; \quad \mathbf{c} = 4; \quad \mathbf{d} = 32$$

$$\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2 - \mathbf{d} = 3^2 + 4^2 + 4^2 - 32 = 9$$

Donc le centre de (S) est $\Omega(3; 4; 4)$ et $\mathbf{R} = \sqrt{9} = 3$

D'où $\Omega(3; 4; 4)$ et rayon $\mathbf{R} = 3$

b) Montrer que le plan (ABC) est tangent à la sphère (S) en un point que l'on déterminera.

On a $d(\Omega, (ABC)) = 3$ et $\mathbf{R} = 3$

Donc le plan (ABC) est tangent à la sphère (S).

Donc (ABC) coupe la sphère (S) en un seul point.

Or $D\Omega = 3$ et $\mathbf{R} = 3$ donc $D \in (S)$ or $D \in (ABC)$

$(ABC) \cap (S) = \{D\}$

D'où le plan (ABC) est tangent à la sphère (S) en D.

4) soit (Q_1) et (Q_2) les deux plans parallèles à (ABC) . Tels que chacun d'eux coupe (S) suivant un cercle de rayon $\sqrt{5}$.

Déterminer une équation cartésienne pour chacun des deux plans (Q_1) et (Q_2) .

Soit (Q) un plan parallèle à (ABC) tel que :

(Q) coupe (S) suivant un cercle de rayon $\sqrt{5}$.

On a $\overrightarrow{D}\Omega = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC})$; $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ normal à (ABC)

(Q) est parallèle à (ABC) et on a $\overrightarrow{D}\Omega$ est normal au plan (ABC) donc $\overrightarrow{D}\Omega$ est normal au plan (Q)

Soit $\mathbf{M}(x; y; z) \in (Q)$

$\overrightarrow{D}\Omega(2; 1; 2)$ est normal à (Q)

$$(Q): 2x + y + 2z + d = 0$$

(Q) coupe (S) suivant un cercle de rayon $\sqrt{5}$.

$$\sqrt{5} = \sqrt{3^2 - (d(\Omega; (Q)))^2} \Leftrightarrow 3^2 - (d(\Omega; (Q)))^2 = 5$$

$$(d(\Omega; (Q)))^2 = 9 - 5 \Leftrightarrow (d(\Omega; (Q)))^2 = 4$$

$$\mathbf{d}(\Omega; (\mathbf{Q})) = 2 \quad \text{car} \quad \mathbf{d}(\Omega; (\mathbf{Q})) > 0$$

On sait que $\mathbf{d}(\Omega; (\mathbf{Q})) > 0$

$$(\mathbf{Q}) : 2x + y + 2z + d = 0 \quad ; \quad \Omega(3; 4; 4)$$

$$\mathbf{d}(\Omega, (\mathbf{Q})) = \frac{|2 \times 3 + 4 + 2 \times 4 + d|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{|18 + d|}{\sqrt{9}}$$

$$\mathbf{d}(\Omega, (\mathbf{Q})) = \frac{|18 + d|}{3} \quad \text{or} \quad \mathbf{d}(\Omega; (\mathbf{Q})) = 2$$

$$\text{Donc } \frac{|18 + d|}{3} = 2 \Leftrightarrow |18 + d| = 6$$

$$\Leftrightarrow 18 + d = 6 \quad \text{ou} \quad 18 + d = -6 \Leftrightarrow d = -12 \quad \text{ou} \quad d = -24$$

$$\text{D'où } (\mathbf{Q}_1) : 2x + y + 2z - 12 = 0 \quad \text{et}$$

$$(\mathbf{Q}_2) : 2x + y + 2z - 24 = 0$$

Exercice 2 : (2023 SN) (3pts)

3) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(\mathbf{O}; \mathbf{u}; \mathbf{v})$ on considère les points A et B d'affixes respectives $\mathbf{a} = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$; $\mathbf{b} = 1 + \sqrt{2} + i$ $\mathbf{c} = \bar{\mathbf{b}}$ et $\mathbf{d} = 2i$

1) Ecrire le nombre complexe \mathbf{a} sous forme trigonométrique.

$$\mathbf{a} = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

$$|\mathbf{a}| = |\sqrt{2} + i\sqrt{2}| = \sqrt{2+2} = 2$$

$$\mathbf{a} = \sqrt{2} + i\sqrt{2} = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\text{D'où } \mathbf{a} = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

2) a) Vérifier que : $\mathbf{b} - \mathbf{d} = \mathbf{c}$

$$\mathbf{b} - \mathbf{d} = 1 + \sqrt{2} + i - 2i \Leftrightarrow \mathbf{b} - \mathbf{d} = 1 + \sqrt{2} - i$$

$$\text{Or } \mathbf{c} = \bar{\mathbf{b}} \text{ et } \bar{\mathbf{b}} = 1 + \sqrt{2} - i$$

$$\text{Donc } \mathbf{b} - \mathbf{d} = \mathbf{c}$$

b) Montrer que : $(\sqrt{2} + 1)(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = \mathbf{b} - \mathbf{d}$ et

déduire que les points A, B et D sont alignés.

$$(\sqrt{2} + 1)(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = (\sqrt{2} + 1)(1 + \sqrt{2} + i - \sqrt{2} - i\sqrt{2})$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{2} + 1)(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = (\sqrt{2} + 1)(1 + i - i\sqrt{2})$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{2} + 1)(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = \sqrt{2} + 1 + i\sqrt{2} + i - 2i - i\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{2} + 1)(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = \sqrt{2} + 1 - i \quad \text{or} \quad \mathbf{c} = \bar{\mathbf{b}}$$

$$\text{Donc } (\sqrt{2} + 1)(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = \mathbf{c} \quad \text{or} \quad \mathbf{c} = \mathbf{b} - \mathbf{d}$$

$$\text{D'où } (\sqrt{2} + 1)(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = \mathbf{b} - \mathbf{d}$$

$$\text{On a } (\sqrt{2} + 1)(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = \mathbf{b} - \mathbf{d}$$

$$\text{Donc } \frac{\mathbf{b} - \mathbf{d}}{\mathbf{b} - \mathbf{a}} = (\sqrt{2} + 1) \quad \text{or} \quad (\sqrt{2} + 1) \in \mathbb{R}$$

Donc $\frac{\mathbf{b} - \mathbf{d}}{\mathbf{b} - \mathbf{a}} \in \mathbb{R}$ donc les points A, B et D sont alignés

3) a) Vérifier que : $\mathbf{ac} = 2\mathbf{b}$

$$\mathbf{ac} = (\sqrt{2} + i\sqrt{2})(1 + \sqrt{2} - i)$$

Donc

$$\mathbf{ac} = (\sqrt{2} + i\sqrt{2})(\sqrt{2} + 2 - i\sqrt{2} + i\sqrt{2} + 2i + \sqrt{2})$$

$$\mathbf{ac} = 2\sqrt{2} + 2 + 2i \Leftrightarrow \mathbf{ac} = 2(\sqrt{2} + 1 + i)$$

D'où $\mathbf{ac} = 2\mathbf{b}$

b) En déduire que : $2\arg(\mathbf{b}) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$

On a $2\mathbf{b} = \mathbf{ac}$ donc $\arg(\mathbf{b}) \equiv \arg(\mathbf{ac})[2\pi]$

Donc $\arg(\mathbf{b}) \equiv \arg(\mathbf{a}) + \arg(\mathbf{c})[2\pi]$ or $\mathbf{c} = \bar{\mathbf{b}}$

Donc $\arg(\mathbf{c}) \equiv \arg(\bar{\mathbf{b}})[2\pi]$ et $\arg(\bar{\mathbf{b}}) \equiv -\arg(\mathbf{b})[2\pi]$

Donc $\arg(\mathbf{b}) \equiv \arg(\mathbf{a}) - \arg(\mathbf{b})[2\pi]$

Donc $2\arg(\mathbf{b}) \equiv \arg(\mathbf{a})[2\pi]$ or $\arg(\mathbf{a}) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$

D'où $2\arg(\mathbf{b}) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$

4) Soit R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$ et qui transforme chaque point M du plan d'affixe z en un point M' d'affixe z' .

a) Montrer que : $z' = \frac{1}{2}az$

$$\mathbf{R}(\mathbf{M}) = \mathbf{M}' \Leftrightarrow \mathbf{z}' - \mathbf{0} = e^{i\frac{\pi}{4}}(\mathbf{z} - \mathbf{0})$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{z}' = e^{i\frac{\pi}{4}}\mathbf{z} \quad \text{on a } \mathbf{a} = 2e^{i\frac{\pi}{4}} \text{ donc } \frac{1}{2}\mathbf{a} = e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$\text{D'où } \mathbf{z}' = \frac{1}{2}\mathbf{az}$$

b) En déduire que $\mathbf{R}(\mathbf{C}) = \mathbf{B}$ et $\mathbf{R}(\mathbf{A}) = \mathbf{D}$

On a $2\mathbf{b} = \mathbf{ac} \Leftrightarrow \mathbf{b} = \frac{1}{2}\mathbf{ac} \Leftrightarrow \mathbf{R}(\mathbf{C}) = \mathbf{B}$

$\mathbf{R}(\mathbf{A}) = \mathbf{D} \Leftrightarrow \mathbf{d} = \frac{1}{2}\mathbf{a} \times \mathbf{a} \Leftrightarrow \mathbf{d} = \frac{1}{2}\mathbf{a}^2$

On a $\mathbf{a} = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ donc $\mathbf{a}^2 = 2(1 + i)^2$

$$\mathbf{a}^2 = 2 \times 2i \Leftrightarrow \frac{1}{2}\mathbf{a}^2 = 2i \Leftrightarrow \frac{1}{2}\mathbf{a}^2 = \mathbf{d}$$

D'où $\mathbf{R}(\mathbf{A}) = \mathbf{D}$

c) Montrer que : $\frac{\mathbf{b} - \mathbf{a}}{\mathbf{c} - \mathbf{a}} = \left(\frac{\sqrt{2} - 1}{2}\right)\mathbf{a}$, puis en

déduire une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB})$.

$$\frac{\mathbf{b}-\mathbf{a}}{\mathbf{c}-\mathbf{a}} = \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2} \right) \mathbf{a} \text{ ? On a } \mathbf{R}(\mathbf{C}) = \mathbf{B} \Leftrightarrow \mathbf{b} = \frac{1}{2} \mathbf{a} \mathbf{c}$$

$$\frac{\mathbf{b}-\mathbf{a}}{\mathbf{c}-\mathbf{a}} = \frac{\frac{1}{2} \mathbf{a} \mathbf{c} - \mathbf{a}}{\mathbf{c}-\mathbf{a}} \Leftrightarrow \frac{\mathbf{b}-\mathbf{a}}{\mathbf{c}-\mathbf{a}} = \frac{1}{2} \mathbf{a} \frac{\mathbf{c}-2}{\mathbf{c}-\mathbf{a}} \Leftrightarrow \frac{\mathbf{b}-\mathbf{a}}{\mathbf{c}-\mathbf{a}} = \frac{1}{2} \mathbf{a} \frac{1+\sqrt{2}-\mathbf{i}-2}{1+\sqrt{2}-\mathbf{i}-\sqrt{2}-\mathbf{i}\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{\mathbf{b}-\mathbf{a}}{\mathbf{c}-\mathbf{a}} = \frac{1}{2} \mathbf{a} \frac{\sqrt{2}-1-\mathbf{i}}{1-\mathbf{i}(1+\sqrt{2})}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\mathbf{b}-\mathbf{a}}{\mathbf{c}-\mathbf{a}} = \frac{1}{2} \mathbf{a} \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1} \times \frac{\sqrt{2}-1-\mathbf{i}}{1-\mathbf{i}(1+\sqrt{2})} \Leftrightarrow \frac{\mathbf{b}-\mathbf{a}}{\mathbf{c}-\mathbf{a}} = \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2} \right) \mathbf{a} \frac{\sqrt{2}-1-\mathbf{i}}{\sqrt{2}-1-\mathbf{i}(1+\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\mathbf{b}-\mathbf{a}}{\mathbf{c}-\mathbf{a}} = \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2} \right) \mathbf{a} \frac{\sqrt{2}-1-\mathbf{i}}{\sqrt{2}-1-\mathbf{i}}$$

D'où $\frac{\mathbf{b}-\mathbf{a}}{\mathbf{c}-\mathbf{a}} = \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2} \right) \mathbf{a}$

On a $\frac{\mathbf{b}-\mathbf{a}}{\mathbf{c}-\mathbf{a}} = \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2} \right) \mathbf{a}$ et $\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2} \right) > 0$ donc $\arg \frac{\mathbf{b}-\mathbf{a}}{\mathbf{c}-\mathbf{a}} \equiv \arg \mathbf{a} [2\pi]$ or $\arg(\mathbf{a}) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$

On a $(\overrightarrow{\mathbf{AC}}, \overrightarrow{\mathbf{AB}}) \equiv \arg \frac{\mathbf{b}-\mathbf{a}}{\mathbf{c}-\mathbf{a}} [2\pi]$

D'où $(\overrightarrow{\mathbf{AC}}, \overrightarrow{\mathbf{AB}}) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$

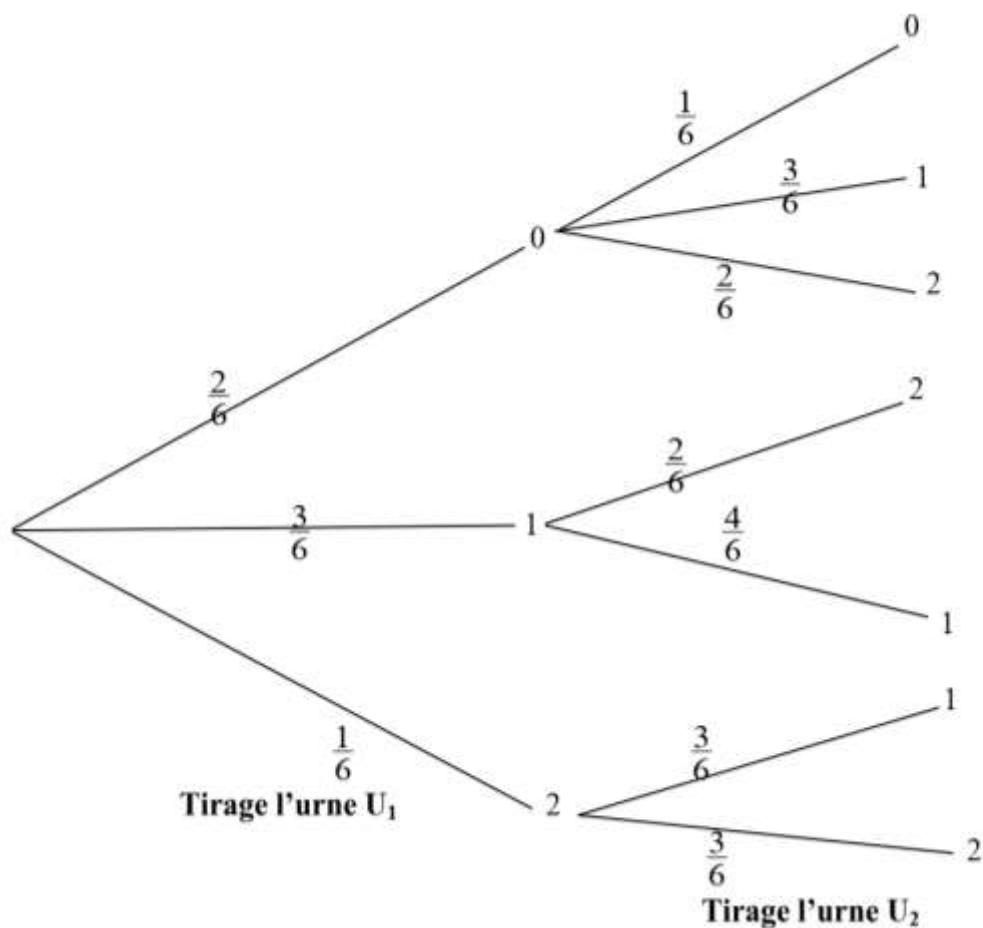
Exercice 3: (2023 SN) (3pts)

Une urne U_1 contient six boules portant les nombres

0 ; 0 ; 1 ; 1 ; 1 ; 2 et Une urne U_2 contient cinq boules portant les nombres 1 ; 1 ; 1 ; 2 ; 2.

On tire une boule de l'urne U_1 et on note le nombre \mathbf{a} qu'elle porte, puis on la met dans l'urne U_2 , ensuite on tire une boule de l'urne U_2 et on note le nombre \mathbf{b} qu'elle porte.

U_1 : 2 (0) ; 3 (1) ; 1 (2) U_2 : 3 (1) ; 2 (2) ; \mathbf{a}

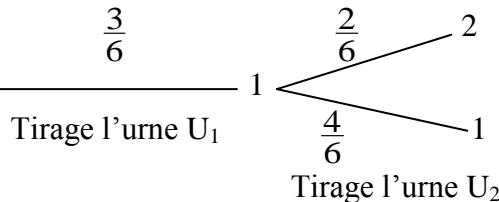


U₁: 2 (0) ; 3 (1) ; 1 (2)

U₂: 3 (1) ; 2 (2)

1) a) Calculer $P(A)$; la probabilité de l'événement

A. A " la boule tirée de l'urne U₁ porte le nombre 1"

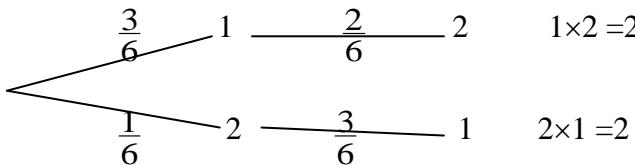


$$P(A) = \frac{3}{6} \times \frac{4}{6} + \frac{3}{6} \times \frac{2}{6} = \frac{3}{6} \times \frac{6}{6}$$

$$\text{D'où } P(A) = \frac{1}{2}$$

b) Montrer que $P(B) = \frac{1}{4}$ (on peut utiliser l'arbre des possibilités).

B " le produit ab est égal à 2 "



$$P(B) = \frac{3}{6} \times \frac{2}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{3}{6} = \frac{9}{36}$$

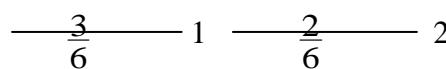
$$P(B) = \frac{1}{4}$$

2) Calculer $P(A / B)$; la probabilité de l'événement

A Sachant que l'événement B est réalisé.

$$P(A / B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$(A \cap B)$ " a = 1 et b = 2 " ab = 2



$$P(A \cap B) = \frac{3}{6} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$$

$$P(A / B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{4}} \text{ donc } P(A / B) = \frac{4}{6}$$

$$\text{D'où } P(A / B) = \frac{2}{3}$$

3) Soit X la variable aléatoire qui associe à chaque résultat de l'expérience, le produit ab.

a) Montrer que $P(X = 0) = \frac{1}{3}$; 0x2 ou 0x1 ou 0x0

$$P(X = 0) = \frac{2}{6} \left(\frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{3}{6} \right) \text{ donc } P(X = 0) = \frac{1}{3}$$

b) Donner la loi de probabilité de X (Remarquer que les valeurs prises par X sont 0 ; 1 ; 2 et 4)

$$P(X = 1) = \frac{3}{6} \times \frac{4}{6} = \frac{1}{3}$$

$$P(X = 2) = P(B) = \frac{1}{4}$$

$$P(X = 4) = \frac{1}{6} \times \frac{3}{6} = \frac{1}{12}$$

k	0	1	2	4
P(X=k)	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$

$$(On a \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = 1)$$

c) On considère les événements :

N " le produit ab est pair non nul" ab = 2 ou ab = 4

$$P(N) = P(X = 2) + P(X = 4) = \frac{1}{4} + \frac{1}{12}$$

$$P(N) = \frac{1}{3}$$

M " le produit ab est égal à 1 " ab = 1x1

$$P(M) = P(X = 1) = \frac{1}{3} \text{ donc } P(M) = \frac{1}{3}$$

Montrer que les événements M et N sont équiprobables.

$$\text{On a } P(M) = \frac{1}{3} \text{ et } P(N) = \frac{1}{3} \text{ donc } P(M) = P(N)$$

D'où les événements M et N sont équiprobables.

Problème : (2023 SN) (11pts)

On considère la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par

$$f(x) = 2 - \frac{2}{x} + (1 - \ln x)^2$$

1) a) Vérifier que pour tout x de $]0; +\infty[$:

$$f(x) = \frac{3x - 2 - 2x \ln x + x(\ln x)^2}{x}$$

$$\text{On a } f(x) = 2 - \frac{2}{x} + (1 - \ln x)^2$$

$$f(x) = \frac{2x - 2 + x(1 - \ln x)^2}{x}$$

$$f(x) = \frac{2x - 2 + x - 2x \ln x + x(\ln x)^2}{x}$$

$$\text{D'où } f(x) = \frac{3x - 2 - 2x \ln x + x(\ln x)^2}{x}$$

b) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} x(\ln x)^2 = 0$ et que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0 \text{ (on peut poser } t = \sqrt{x} \text{)}$$

On a $t = \sqrt{x} \Leftrightarrow x = t^2 \quad x \rightarrow 0^+ \Leftrightarrow t \rightarrow 0^+$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x(\ln x)^2 = \lim_{t \rightarrow 0^+} t^2 (\ln t^2)^2 = \lim_{t \rightarrow 0^+} (t^2 \ln t)^2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x(\ln x)^2 = \lim_{t \rightarrow 0^+} (2t \ln t)^2 = 0$$

Car $\lim_{t \rightarrow 0^+} t \ln t = 0$ D'où $\lim_{x \rightarrow 0^+} x(\ln x)^2 = 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0 ?$$

$$\text{On a } t = \sqrt{x} \Leftrightarrow x = t^2 \quad x \rightarrow +\infty \Leftrightarrow t \rightarrow +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{(\ln t^2)^2}{t^2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{2 \ln t}{t} \right)^2 = 0$$

$$\text{Car } \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t} = 0$$

$$\text{D'où } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$$

c) Déduire que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ puis donner une

interprétation géométriquement du résultat.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3x - 2 - 2x \ln x + x(\ln x)^2}{x}$$

$$\text{On a } \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} x(\ln x)^2 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} 3x - 2 - 2x \ln x + x(\ln x)^2 = -2 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0^+$$

$$\text{D'où } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$$

On a $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ donc la courbe (C_f) admet une

asymptote verticale d'équation $x = 0$.

d) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, puis montrer que la

courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 - \frac{2}{x} + (1 - \ln x)^2$$

$$\text{puisque } \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 - \frac{2}{x} = 2 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - \ln x)^2 = +\infty$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

$$\text{D'où } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} f(x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \frac{3x - 2 - 2x \ln x + x(\ln x)^2}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(\frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} - 2 \frac{\ln x}{x} + \frac{(\ln x)^2}{x} \right)}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} - 2 \frac{\ln x}{x} + \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$$

$$\text{Car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \text{ et}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$$

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ la courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$.

2) Montrer que pour tout x de $]0; +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{2(1 - x + x \ln x)}{x^2}$$

$$\text{On a } f(x) = 2 - \frac{2}{x} + (1 - \ln x)^2$$

$$f'(x) = -\frac{2}{x^2} + 2(1 - \ln x)(1 - \ln x)$$

$$f'(x) = \frac{2}{x^2} + 2(1 - \ln x)\left(-\frac{1}{x}\right)$$

$$f'(x) = \frac{2}{x^2}(1 - x(1 - \ln x))$$

$$f'(x) = \frac{2(1 - x + x \ln x)}{x^2} \quad \forall x \in]0; +\infty[$$

3) En exploitant le tableau de variation ci-dessous, de la fonction dérivée f' de f sur $]0; +\infty[$

x	0	1	β	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	0	$f'(\beta)$	0

a) Prouver que f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$ puis dresser le tableau de variation de f .

$$\text{On a } f'(x) = \frac{2(1 - x + x \ln x)}{x^2} \quad \forall x \in]0; +\infty[$$

$x \rightarrow x \ln x$, $x \rightarrow 1 - x$ et $x \rightarrow x^2$ sont continues sur $]0; +\infty[$ donc $x \rightarrow 1 - x + x \ln x$ est continue sur $]0; +\infty[$

Donc f' est continue sur $]0; +\infty[$ car c'est le quotient de deux fonctions continues sur $]0; +\infty[$.

$$f'([0; 1]) = [0; +\infty[\text{ donc } f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in [0; 1]$$

$$\text{et } f'([1; \beta]) = [0; f'(\beta)] \text{ donc } f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in [1; \beta]$$

$$f'([\beta; +\infty[) = [0; f'(\beta)] \text{ donc } f'(x) > 0 \quad \forall x \in [\beta; +\infty[$$

$$\text{Donc } f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in]0; +\infty[$$

D'où f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	
$f(x)$	$-\infty$		$+\infty$

b) Donner le tableau de signe de la dérivée seconde f'' de la fonction f sur $]0; +\infty[$

On a f' est décroissante sur $]0; 1]$

Donc $\forall x \in]0; 1] \quad f''(x) \leq 0$

On a f' est croissante sur $[1; \beta]$

Donc $\forall x \in [1; \beta] \quad f''(x) \geq 0$

On a f' est décroissante sur $[\beta; +\infty[$

Donc $\forall x \in [\beta; +\infty[\quad f''(x) \leq 0$

x	0	1	β	$+\infty$
$f''(x)$	—	0	+	0

c) Déduire la concavité de la courbe (C_f) en précisant les abscisses de ses deux points d'inflexions.

$\forall x \in]0; 1] \cup [\beta; +\infty[\quad f''(x) \leq 0$ la courbe (C_f) est concave sur les intervalles $]0; 1]$ et $[\beta; +\infty[$

$\forall x \in [1; \beta] \quad f''(x) \geq 0$ la courbe (C_f) est convexe sur l'intervalle $[1; \beta]$

la courbe (C_f) change de concavité en 1 et en β

La courbe (C_f) admet deux points d'inflexions d'abscisses 1 et β .

4) a) A partir de la courbe (C_g) déterminer le signe de la fonction g sur $]0; +\infty[$.

la courbe (C_g) est au-dessus de l'axe des abscisses sur $[\alpha; 1]$ donc $g(x) \geq 0 \quad \forall x \in [\alpha; 1]$

la courbe (C_g) est en dessous de l'axe des abscisses sur les intervalles $]0; \alpha]$ et $[1; +\infty[$

Donc $g(x) \leq 0 \quad \forall x \in]0; \alpha] \cup [1; +\infty[$

x	0	α	1	$+\infty$
$g(x)$	—	0	+	0

b) Déduire que la droite (Δ) est en dessous de la courbe (C_f) sur l'intervalle $[\alpha; 1]$ et au-dessus de la courbe (C_f) sur les intervalles $]0; \alpha[$ et $[1; +\infty[$

On a $g : x \rightarrow f(x) - x$

$\forall x \in [\alpha; 1] \quad g(x) \geq 0 \Leftrightarrow f(x) - x \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq x$

$\forall x \in [\alpha; 1] \quad x \leq f(x) \quad (\Delta) : y = x$

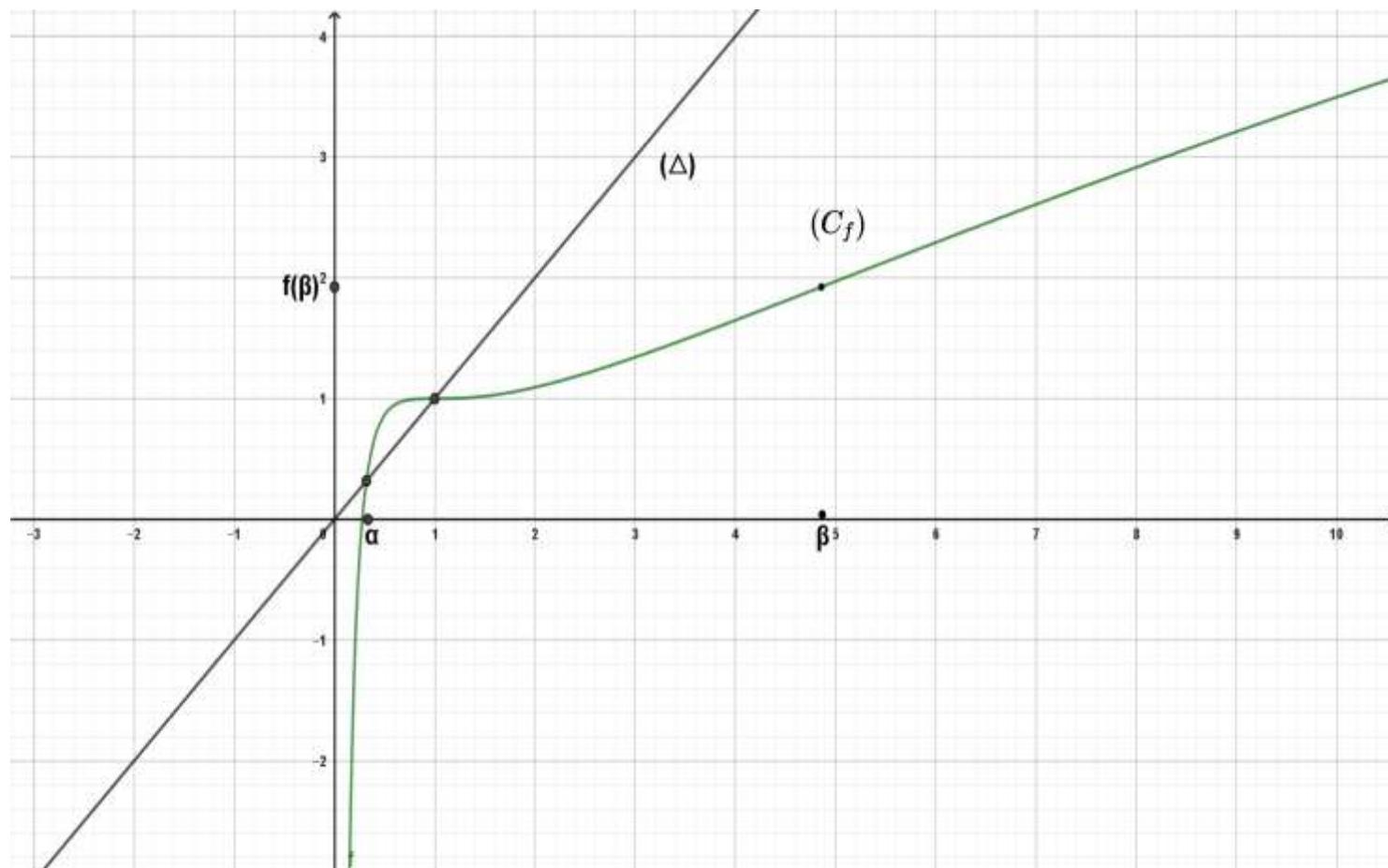
La droite (Δ) est en dessous de la courbe (C_f) sur l'intervalle $[\alpha; 1]$

$\forall x \in]0; \alpha] \cup [1; +\infty[\quad g(x) \leq 0 \Leftrightarrow f(x) - x \leq 0$

$\forall x \in]0; \alpha] \cup [1; +\infty[\quad x \geq f(x)$

La droite (Δ) est au-dessus de la courbe (C_f) sur les intervalles $]0; \alpha[$ et $[1; +\infty[$

5) Construire la courbe (C_f) et la droite (Δ) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (On prend $\alpha \approx 0,3$, $\beta \approx 4,9$; $f(\beta) \approx 1,9$)



6) a) Vérifier que la fonction $x \rightarrow 2x - x \ln x$ est une primitive de la fonction $x \rightarrow 1 - \ln x$ sur $[\alpha; 1]$

On pose $u(x) = 2x - x \ln x \quad \forall x \in [\alpha; 1]$ donc $u'(x) = 2 - (\ln x + 1) \quad \forall x \in [\alpha; 1]$

$u'(x) = 1 - \ln x \quad \forall x \in [\alpha; 1]$

la fonction $x \rightarrow 2x - x \ln x$ est une primitive de la fonction $x \rightarrow 1 - \ln x$ sur $[\alpha; 1]$

b) En utilisant une intégration par parties, montrer que : $\int_{\alpha}^1 (1 - \ln x)^2 dx = 5(1 - \alpha) + \alpha(4 - \ln \alpha) \ln \alpha$

on pose $J = \int_{\alpha}^1 (1 - \ln x)^2 dx$

$$u(x) = (1 - \ln x)^2 \quad u'(x) = -2(1 - \ln x) \frac{1}{x}$$

$$v'(x) = 1 \quad v(x) = x$$

$$J = \left[x(1 - \ln x)^2 \right]_{\alpha}^1 - \int_{\alpha}^1 -2x(1 - \ln x) \frac{1}{x} dx \Leftrightarrow J = 1 - \alpha(1 - \ln \alpha)^2 + 2 \int_{\alpha}^1 (1 - \ln x) dx$$

$$J = 1 - \alpha(1 - \ln \alpha)^2 + 2[2x - x \ln x]_{\alpha}^1 \Leftrightarrow J = 1 - \alpha(1 - \ln \alpha)^2 + 4 - (4\alpha - 2\alpha \ln \alpha)$$

$$\text{Donc } J = 5 - \alpha(1 - 2\ln \alpha + (\ln \alpha)^2) - (4\alpha - 2\alpha \ln \alpha)$$

$$\text{Donc } J = 5(1 - \alpha) + 2\alpha \ln \alpha - \alpha(\ln \alpha)^2 + 2\alpha \ln \alpha$$

$$\text{Donc } J = 5(1 - \alpha) + 4\alpha \ln \alpha - \alpha(\ln \alpha)^2$$

$$\int_{\alpha}^1 (1 - \ln x)^2 dx = 5(1 - \alpha) + \alpha(4 - \ln \alpha) \ln \alpha$$

c) Déduire en fonction de α l'aire de la partie du plan délimité par la courbe (C_f) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \alpha$ et $x = 1$.

$$A = \int_{\alpha}^1 |f(x)| dx \text{ cm} \times \text{cm} \quad \forall x \in [\alpha; 1] \quad f(x) \geq x \quad \text{donc } f(x) > 0 \quad \forall x \in [\alpha; 1]$$

$$A = \int_{\alpha}^1 f(x) dx \text{ cm}^2 \quad \text{on pose } I = \int_{\alpha}^1 f(x) dx$$

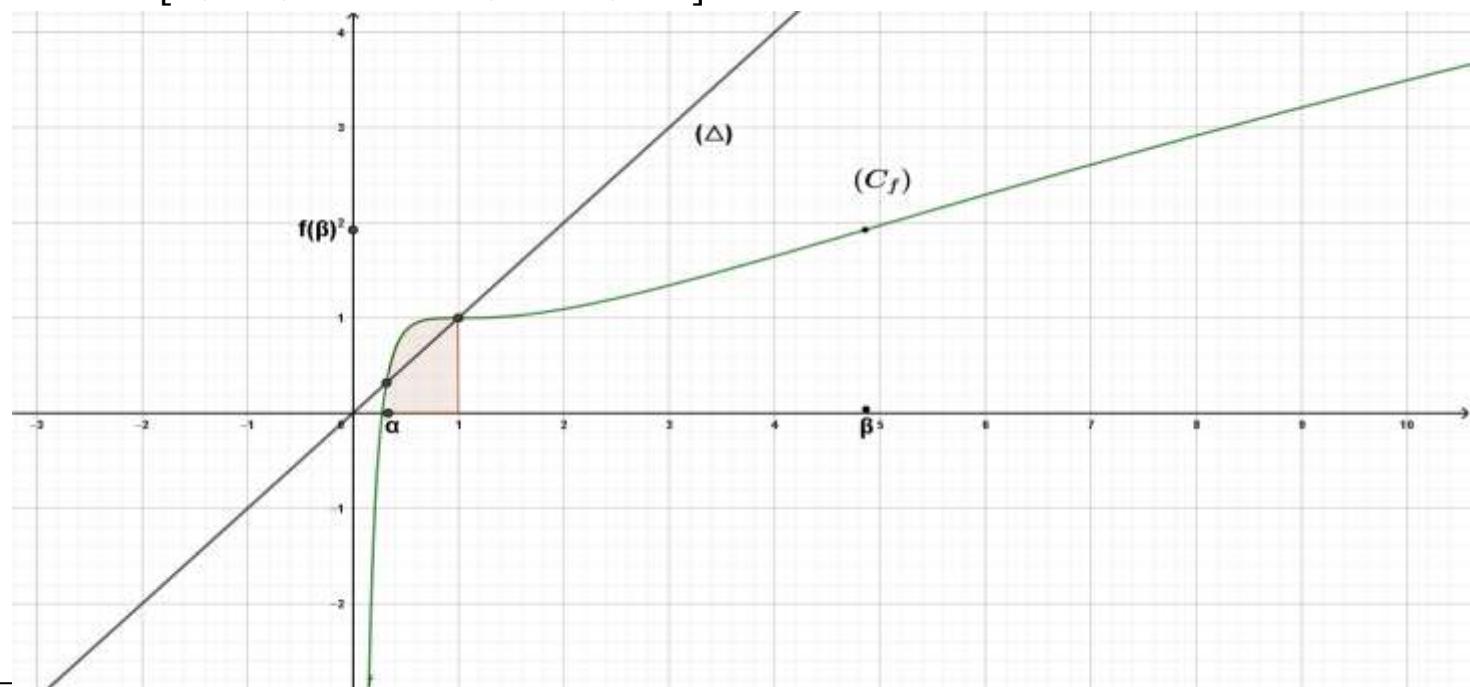
$$I = \int_{\alpha}^1 2 - \frac{2}{x} + (1 - \ln x)^2 dx ; \text{ on a } x \rightarrow 2 - \frac{2}{x} \text{ et } x \rightarrow (1 - \ln x)^2 \text{ sont continues sur } [\alpha; 1]$$

$$\text{Donc } I = \int_{\alpha}^1 f(x) dx = \int_{\alpha}^1 \left(2 - \frac{2}{x}\right) dx + \int_{\alpha}^1 (1 - \ln x)^2 dx$$

$$\text{On a } \int_{\alpha}^1 \left(2 - \frac{2}{x}\right) dx = [2x - 2\ln x]_{\alpha}^1 = 2 - 2\alpha + 2\ln \alpha$$

$$\text{Donc } I = 2 - 2\alpha + 2\ln \alpha + 5(1 - \alpha) + \alpha(4 - \ln \alpha) \ln \alpha \quad I = 7(1 - \alpha) + 2\ln \alpha + \alpha(4 - \ln \alpha) \ln \alpha$$

$$\text{D'où } A = [7(1 - \alpha) + 2\ln \alpha + \alpha(4 - \ln \alpha) \ln \alpha] \text{ cm}^2$$



7) Soit la suite (U_n) définie par $U_0 \in]\alpha; 1[$

$$U_{n+1} = f(U_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

a) Montrer par récurrence que: $\alpha < U_n < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Pour $n = 0$ on a $U_0 \in]\alpha; 1[$ donc $\alpha < U_0 < 1$

Soit $n \in \mathbb{N}$ supposons que $\alpha < U_n < 1$ et montrons que $\alpha < U_{n+1} < 1$

On a f est strictement croissante sur $[\alpha; 1]$ et $\alpha < U_n < 1$

Donc $f(\alpha) < f(U_n) < f(1)$

Or $g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow f(\alpha) = \alpha$ et $g(1) = 0 \Leftrightarrow f(1) = 1$

Donc $\alpha < U_{n+1} < 1$

$$\text{D'où } \alpha < U_n < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

b) Montrer que la suite (U_n) est croissante. (on peut utiliser la question 4) b)

On a $\forall x \in [\alpha; 1] \quad f(x) \geq x$ or $U_n \in]\alpha; 1[$

Donc $f(U_n) \geq U_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Donc $U_{n+1} \geq U_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

D'où la suite (U_n) est croissante.

c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite.

On a la suite (U_n) est croissante et majorée

D'où la suite (U_n) est convergente

On a $U_{n+1} = f(U_n)$ et $U_0 \in]\alpha; 1[$

f est continue sur $[\alpha; 1]$ et $f([\alpha; 1]) = [\alpha; 1]$

(U_n) est convergente donc sa limite est une solution de l'équation $f(x) = x$

On sait que $f(x) = x \Leftrightarrow f(x) - x = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0 \Leftrightarrow x = \alpha$ ou $x = 1$

Or (U_n) est croissante donc $U_n \geq U_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Donc $U_0 \leq U_n < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ et $U_0 \in]\alpha; 1[$

D'où $\lim U_n = 1$