

مدة الإجاز	الرياضيات	المادة
المعامل	مسلك علوم الحياة والأرض ومسلك العلوم الفيزيائية – خيار فرنسيّة	الشعبة أو المسلك
الإجتياز		

INSTRUCTIONS GÉNÉRALES

- ✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;
 - ✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;
 - ✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter.

COMPOSANTES DU SUJET

- ✓ L'épreuve est composée de quatre exercices et un problème indépendants entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

Exercice 1	Géométrie dans l'espace	3 points
Exercice 2	Nombres complexes	3 points
Exercice 3	Calcul des probabilités	3 points
Exercice 4	Calcul intégral	2 points
Problème	Etude d'une fonction numérique, et suites numériques	9 points

- ✓ In désigne la fonction logarithme népérien



Exercice 1 : (3 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère la sphère (S) de centre $\Omega(2, 1, 2)$ et de rayon 3 et le plan (P) passant par le point $A(-1, 0, 3)$ et dont $\vec{u}(4, 0, -3)$ est un vecteur normal .

0.5 1) Montrer qu'une équation de (S) est $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y - 4z = 0$

0.5 2) Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (P) est $4x - 3z + 13 = 0$

0.5 3) a) Vérifier que $\begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = 1 \\ z = 2 - 3t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$ est une représentation paramétrique de la droite (Δ)
passant par le point Ω et orthogonale au plan (P)

0.5 b) Déterminer les coordonnées de H point d'intersection de la droite (Δ) et du plan (P)

0.25 4) a) Calculer $d(\Omega, (P))$

0.75 b) Montrer que le plan (P) est tangent à la sphère (S) en un point que l'on déterminera .

Exercice 2 : (3 points)

0.75 1) Résoudre dans l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes l'équation $z^2 - 2\sqrt{2}z + 4 = 0$

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , on considère le point A d'affixe $a = \sqrt{2}(1-i)$ et la rotation R de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$

0.25 a) Ecrire a sous forme trigonométrique.

0.5 b) Vérifier que l'affixe du point B image du point A par la rotation R est

$$b = 2 \left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \right)$$

0.5 3) a) On considère le point C d'affixe $c = 1+i$, montrer que $b^2 - c^2 = 2\sqrt{3}$

0.5 b) Soit t la translation de vecteur \overrightarrow{OC} et D l'image du point B par la translation t
Montrer que $OD = |b+c|$

0.5 c) En déduire que $OD \times BC = 2\sqrt{3}$

Exercice 3 : (3 points)

Une urne contient 12 boules indiscernables au toucher : 3 boules de couleur rouge portant chacune le nombre 1 , et 3 boules de couleur rouge portant chacune le nombre 2 , et 6 boules de couleur verte portant chacune le nombre 2

On tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne. On considère les événements suivants :

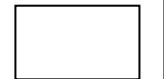
A : "Obtenir deux boules portant le même nombre" ;

B : "Obtenir deux boules de couleurs différentes "

C : "Obtenir deux boules portant deux nombres dont la somme est égale à 3"



<p>1.5 1) Montrer que $p(A) = \frac{13}{22}$ et $p(B) = \frac{6}{11}$ et calculer $p(C)$</p> <p>0.5 2) a) Montrer que $p(A \cap B) = \frac{3}{11}$</p> <p>0.5 b) Les événements A et B sont-ils indépendants ? Justifier la réponse.</p> <p>0.5 3) Sachant que l'événement B est réalisé, calculer la probabilité d'obtenir deux boules portant le même nombre.</p>	<p>Exercice 4 : (2 points)</p> <p>1)a) Montrer que la fonction $H : x \mapsto xe^x$ est une primitive de la fonction $h : x \mapsto (x+1)e^x$ sur \mathbb{R}</p> <p>0.5 b) En déduire que $\int_0^1 (x+1)e^x dx = e$</p> <p>1 2) En utilisant une intégration par parties, calculer $\int_0^1 (x^2 + 2x - 1)e^x dx$</p>									
<p>0.25 1) Calculer $g(1)$</p> <p>0.5 2) A partir de ce tableau, déterminer le signe de $g(x)$ sur chacun des intervalles $[0,1]$ et $[1,+\infty[$</p> <p>II) On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par : $f(x) = x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2x^2} + \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2$</p> <p>Soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j})</p> <p>0.5 1) a) Vérifier que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$</p> <p>0.5 b) Montrer que la droite (D) d'équation $y = x - \frac{1}{2}$ est asymptote à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$</p> <p>0.25 c) Déterminer la position relative de la droite (D) et de la courbe (C)</p> <p>0.75 2) Montrer que $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$ et interpréter géométriquement le résultat.</p> <p>1 3) a) Montrer que $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$ pour tout x appartenant à l'intervalle $[0,+\infty[$</p> <p>0.5 b) Montrer que la fonction f est décroissante sur $[0,1]$ et croissante sur $[1,+\infty[$</p> <p>0.5 c) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0,+\infty[$</p> <p>1 4) Construire dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) la droite (D) et la courbe (C) (unité : 1 cm)</p>	<p>Problème : (9 points)</p> <p>I) Soit g la fonction numérique définie sur $]0, +\infty[$ par : $g(x) = x^3 - 1 - 2\ln^2 x + 2\ln x$</p> <p>Le tableau ci-contre est le tableau de variations de la fonction g sur l'intervalle $]0, +\infty[$</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td style="padding: 5px;">x</td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">$+\infty$</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">$g'(x)$</td> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px;">+</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">$g(x)$</td> <td style="padding: 5px;">-</td> <td style="padding: 5px; text-align: right;">$\nearrow +\infty$</td> </tr> </table>	x	0	$+\infty$	$g'(x)$		+	$g(x)$	-	$\nearrow +\infty$
x	0	$+\infty$								
$g'(x)$		+								
$g(x)$	-	$\nearrow +\infty$								



	<p>III) On considère la fonction numérique h définie sur $]0, +\infty[$ par : $h(x) = f(x) - x$</p> <p>1) a) Vérifier que $h(1) = 0$</p> <p>b) Dans la figure ci-contre (C_h) est la représentation graphique de la fonction h. Déterminer le signe de $h(x)$ sur chacun des intervalles $]0, 1]$ et $[1, +\infty[$ puis en déduire que $f(x) \leq x$ pour tout x de $[1, +\infty[$.</p> <p>2) On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = e$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de \mathbb{N}</p> <p>a) Montrer par récurrence que $1 \leq u_n \leq e$ pour tout n de \mathbb{N}</p> <p>b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante. (On pourra utiliser le résultat de la question III)1)b))</p> <p>c) En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.</p>
0.25	
0.75	
0.75	
0.75	
0.75	

