

Exercice 1 :

On considère la suite (U_n) définie par :

$$U_{n+1} = \frac{3+U_n}{5-U_n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad U_0 = 2$$

1) Montrer que : $U_{n+1} - 3 = \frac{4(U_n - 3)}{2 + (3 - U_n)}$

$$\begin{aligned} U_{n+1} - 3 &= \frac{3+U_n}{5-U_n} - 3 = \frac{3+U_n - 15 + 3U_n}{2+3-U_n} \\ &= \frac{4U_n - 12}{2+3-U_n} = \frac{4(U_n - 3)}{2 + (3 - U_n)} \end{aligned}$$

Puis montrer que : $U_n < 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

On considère la suite (U_n) définie par :

Pour $n = 0$ on a $U_0 = 2$ donc $U_0 < 3$

Soit $n \in \mathbb{N}$ supposons que $U_n < 3$ et montrons que $U_{n+1} < 3$ c'est-à-dire $U_{n+1} - 3 < 0$

$$\text{On a } U_{n+1} - 3 = \frac{4(U_n - 3)}{2 + (3 - U_n)}$$

Puisque $U_n < 3$ donc $U_n - 3 < 0$ et $3 - U_n > 0$

$$\text{Donc } U_{n+1} - 3 = \frac{4(U_n - 3)}{2 + (3 - U_n)} < 0 \text{ donc } U_{n+1} < 3$$

$$\text{D'où } U_n < 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

2) On considère la suite (V_n) définie par :

$$V_n = \frac{U_n - 1}{3 - U_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

a – Montrons que $V_{n+1} = \frac{1}{2} V_n$?

$$V_{n+1} = \frac{U_{n+1} - 1}{3 - U_{n+1}} = \frac{\frac{3+U_n}{5-U_n} - 1}{-\frac{4(U_n - 3)}{5-U_n}} = \frac{3+U_n - 5 + U_n}{-4(3 - U_n)} = \frac{2(U_n - 1)}{4(3 - U_n)} = \frac{1}{2} \left(\frac{U_n - 1}{3 - U_n} \right) \text{ donc } V_{n+1} = \frac{1}{2} V_n$$

$$\text{D'où } V_{n+1} = \frac{1}{2} V_n \text{ donc } V_{n+1} = \frac{1}{2} V_n$$

D'où (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$

$$V_0 = \frac{U_0 - 1}{3 - U_0} = 1 \quad \text{et} \quad V_n = V_0 \left(\frac{1}{2} \right)^n$$

$$\text{D'où } V_n = \left(\frac{1}{2} \right)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\text{b – On a } V_n = \frac{U_n - 1}{2U_n - 1} \Leftrightarrow V_n(3 - U_n) = U_n - 1$$

$$\Leftrightarrow 3V_n + 1 = U_n + V_n U_n \Leftrightarrow U_n(1 + V_n) = 3V_n + 1$$

$$\text{D'où } U_n = \frac{1 + 3V_n}{1 + V_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\text{D'où } U_n = \frac{1 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\text{c) } \lim U_n = \lim \frac{1 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n} = 1$$

$$\text{Car } -1 < \frac{1}{2} < 1 \quad \text{et} \quad \lim \left(\frac{1}{2} \right)^n = 0$$

Exercice 2 :

$C(2, 2, 1)$; $B(3, 1, 1)$; $A(2, 1, 3)$,

1) a – Montrer que : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} &= \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \vec{k} \\ &= 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \end{aligned}$$

$$\text{D'où } \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$$

b – En déduire que $2x + 2y + z - 9 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC) .

Soit $M(x; y; z) \in (ABC)$

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ est un vecteur normal à } (ABC)$$

$$(ABC) : 2x + 2y + z + d = 0 \quad \text{or} \quad A(2, 1, 3) \in (ABC)$$

$$\text{Donc } 2 \times 2 + 2 \times 1 + 3 + d = 0 \text{ donc } d = -9$$

$$\text{D'où } (ABC) : 2x + 2y + z - 9 = 0$$

2) Soit (S) la sphère d'équation :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 34 = 0$$

a) Montrer que le centre de (S) est $\Omega(1, -1, 0)$ et pour rayon 6.

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 34 = 0$$

$$\mathbf{a} = \frac{-2}{-2} = 1 ; \quad \mathbf{b} = \frac{2}{-2} = -1 ; \quad \mathbf{c} = 0 ; \quad \mathbf{d} = -34$$

$$a^2 + b^2 + c^2 - d = (1)^2 + (-1)^2 + 0^2 - (-34) = 36 > 0$$

Donc le centre de (S) est $\Omega(1; -1; 0)$ et $R = \sqrt{36} = 6$

D'où $\Omega(1; -1; 0)$ et rayon $R = 6$

b - Montrer que $d(\Omega, (ABC)) = 3$

$$(ABC) : 2x + 2y + z - 9 = 0 \quad \Omega(1; -1; 0)$$

$$d(\Omega, (ABC)) = \frac{|2 \times 1 + 2 \times (-1) + 0 - 9|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{9}{3} = 3$$

D'où $d(\Omega, (ABC)) = 3$

On a $d(\Omega, (ABC)) = 3$ et $R = 6$

Donc $d(\Omega, (ABC)) < R$

Donc le plan (ABC) coupe la sphère selon un cercle (Γ)

3) a - Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par Ω et Orthogonal au plan (ABC).

On a (Δ) est Orthogonal au plan (ABC)

$$\text{On a } \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ est un vecteur normal à (ABC)}$$

Donc c'est un vecteur directeur de la droite (Δ)

Soit $M(x; y; z) \in (\Delta)$

$$(\Delta) : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + 2t \\ z = 0 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

b) B est le centre du cercle (Γ) $(\Delta) \cap (ABC) = \{B\}$?

Première méthode :

$M(x; y; z) \in (\Delta) \cap (ABC)$ équivaut à

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + 2t \\ z = t \\ 2x + 2y + z - 9 = 0 \end{cases}$$

$$2(1 + 2t) + 2(-1 + 2t) + t - 9 = 0$$

$$\text{Donc } 2 + 4t - 2 + 4t + t - 9 = 0 \Leftrightarrow 9t = 9 \Leftrightarrow t = 1$$

$$\begin{cases} x = 1 + 2 \\ y = -1 + 2 \\ z = 1 \end{cases} \quad \text{d'où } B(3; 1; 1) \text{ est le centre du cercle } (\Gamma)$$

Deuxième méthode :

On a $(\Delta) \cap (ABC) = \{B\}$ et on sait que $B \in (ABC)$ il suffit de montrer que $B \in (\Delta)$ $B(3; 1; 1)$

$$\begin{cases} 3 = 1 + 2t \\ 1 = -1 + 2t \\ 1 = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = 2t \\ 2 = 2t \\ 1 = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 1 \\ t = 1 \end{cases} \quad \text{donc } B \in (\Delta)$$

D'où $B(3; 1; 1)$ est le centre du cercle (Γ).

Exercice 3 :

1) Résoudre dans C : $z^2 - 4z + 29 = 0$

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 29 = -100$$

$$= (10i)^2$$

Donc l'équation admet deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{4 + 10i}{2} = 2 + 5i \quad \text{et} \quad z_2 = \overline{z_1} = 2 - 5i$$

D'où $S = \{2 - 5i; 2 + 5i\}$

2) Ω, A et B d'affixes respectives $\omega = 2 + 5i$;

$$a = 5 + 2i ; \quad b = 5 + 8i$$

a) $u = b - \omega$

Vérifier que $u = 3 + 3i$

$$u = b - \omega = 5 + 8i - (2 + 5i) = 5 + 8i - 2 - 5i = 3 + 3i$$

d'où $u = 3 + 3i$

$$|u| = |3(1 + i)| = 3|1 + i| = 3\sqrt{1^2 + 1^2} = 3\sqrt{2}$$

$$u = 3(1 + i) = 3\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 3\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$u = 3\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\text{D'où } \arg(u) = \frac{\pi}{4} [2\pi]$$

b) Déterminer un argument de $\overline{u}$ le conjugué de u
on sait que $\arg \overline{u} = -\arg u [2\pi]$

$$\text{d'où } \arg \overline{u} = -\frac{\pi}{4} [2\pi]$$

c)) Vérifier que $a - \omega = \overline{u}$

$$a - \omega = 5 + 2i - (2 + 5i) = 5 + 2i - 2 - 5i = 3 - 3i$$

$$a - \omega = 3 - 3i = \overline{u}$$

$$\text{En déduire que } \Omega A = \Omega B \text{ et } \arg \left(\frac{b - \omega}{a - \omega} \right) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

On $a - \omega = \overline{u}$ et $u = b - \omega$

On sait que $|u| = |\overline{u}|$

$$\text{Donc } |u| = |\overline{u}| \Leftrightarrow |b - \omega| = |a - \omega| \Leftrightarrow \Omega A = \Omega B$$

$$\arg \left(\frac{b - \omega}{a - \omega} \right) = \arg(b - \omega) - \arg(a - \omega) [2\pi]$$

$$= \arg(u) - \arg(\overline{u}) \frac{\pi}{2} [2\pi] = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4} \right) [2\pi] = \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

$$\text{D'où } \arg \left(\frac{b - \omega}{a - \omega} \right) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

d) Soit R la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$

Déterminer l'image du point A par la rotation R
 $R(A)$?

$$R(A) = A' \Leftrightarrow a' = e^{i\frac{\pi}{2}}(a - \omega) + \omega \Leftrightarrow a' = e^{i\frac{\pi}{2}} \overline{u} + \omega$$

$$\Leftrightarrow a' = i(3 - 3i) + 2 + 5i \Leftrightarrow a' = 3i + 3 + 2 + 5i$$

$$\Leftrightarrow a' = 5 + 8i = b$$

$$\text{D'où } R(A) = B$$

Problème :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x - 2 + e^{2x} - 4e^x$$

(C_f) est la courbe représentative de f dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (unité : 1 cm)

1) a) Montrer que : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x - 2 + e^{2x} - 4e^x$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x - 2 + (e^x)^2 - 4e^x = -\infty$$

$$\text{car } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x - 2 = -\infty$$

b) Montrer que la droite (D) d'équation $y = 2x - 2$ est asymptote à (C_f) au voisinage de $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (2x - 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x)^2 - 4e^x = 0$$

$$\text{car } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \text{ donc la droite } (D) \text{ d'équation}$$

$y = 2x - 2$ est asymptote à (C_f) au voisinage de $-\infty$.

2) a - Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - 2 + e^x(e^x - 4) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - 2 = +\infty$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 2 + e^x(e^x - 4)}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 - \frac{2}{x} + \frac{e^x}{x}(e^x - 4) = +\infty$$

Car Erreur ! Signet non défini. et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - 4) = +\infty$$

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ d'où la courbe (C) admet au

voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

3) a - Montrer que $f'(x) = 2(e^x - 1)^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = 2x - 2 + e^{2x} - 4e^x$$

$$f'(x) = 2 + 2e^{2x} - 4e^x = 2((e^x)^2 - 2e^x + 1)$$

$$\text{D'où } f'(x) = 2(e^x - 1)^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

b) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$. (Remarque que $f(0) = 0$)

$$\text{On a } f'(x) = 2(e^x - 1)^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Donc } f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Donc f est croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'(x)	+	0	+
f(x)	$-\infty$		$+\infty$

c) Montrer qu'il existe un réel unique α dans l'intervalle $]1, \ln 4[$ tel que $f(\alpha) = 0$

f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $[1; \ln 4]$

$$f(1) = e^2 - 4e < 0 \quad e^2 - 4e \approx -3,51 \text{ donc } f(1) < 0$$

$$f(\ln 4) = 2 \ln 4 - 2 + e^{2 \ln 4} - 4e^{\ln 4}$$

$$f(\ln 4) = 2 \ln 4 - 2 + e^{\ln 4^2} - 4 \times 4$$

$$f(\ln 4) = 2 \ln 4 - 2 + 16 - 16 = 2 \ln 4 - 2 > 0$$

$$f(\ln 4) > 0 \text{ donc } f(1)f(\ln 4) < 0$$

D'où l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution α dans $]1; \ln 4[$

4) a) Montrer que (C_f) se trouve au-dessus de (D) sur $]\ln 4, +\infty[$ et en dessous de (D) sur $]-\infty, \ln 4[$

$$f(x) - (2x - 2) = e^{2x} - 4e^x = e^x(e^x - 4)$$

$$f(x) - (2x - 2) = 0 \Leftrightarrow e^x(e^x - 4) = 0$$

$$\text{Or } \forall x \in \mathbb{R} \quad e^x > 0$$

$$e^x - 4 = 0 \Leftrightarrow e^x = 4 \Leftrightarrow x = \ln 4$$

x	$-\infty$	$\ln 4$	$+\infty$
$e^x - 4$	-	0	+

(C_f) se trouve au-dessus de (D) sur $]\ln 4, +\infty[$ et en dessous de (D) sur $]-\infty, \ln 4[$

b - Montrer que (C_f) admet un point d'inflexion de coordonnées $(0; 5)$.

$$f''(x) = 4(e^x - 1)e^x$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+

C_f admet un point d'inflexion de coordonnées $(0; -5)$
 $f(0) = -5$

5) a) Montrer que $\int_0^{\ln 4} (e^{2x} - 4e^x) dx = -\frac{9}{2}$

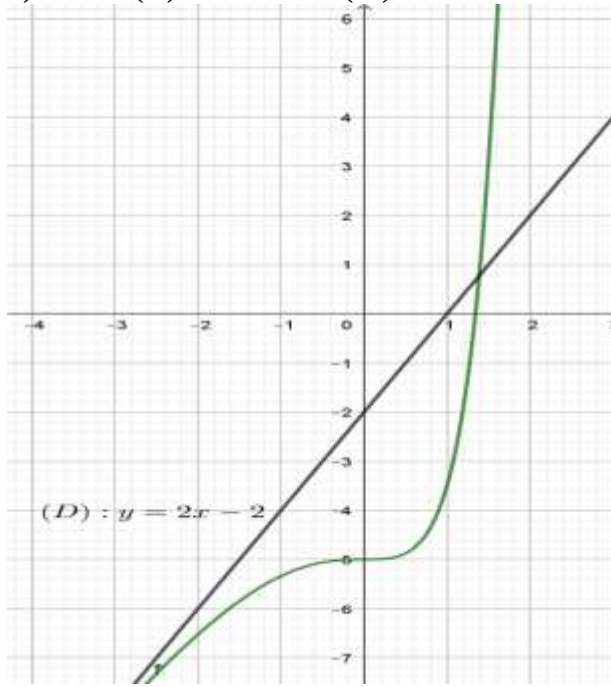
$$\int_0^{\ln 4} (e^{2x} - 4e^x) dx = \left[\frac{1}{2} e^{2x} - 4e^x \right]_0^{\ln 4}$$

$$\int_0^{\ln 4} (e^{2x} - 4e^x) dx = \frac{1}{2} e^{2 \ln 4} - 4e^{\ln 4} - \left(\frac{1}{2} - 4 \right)$$

$$\int_0^{\ln 4} (e^{2x} - 4e^x) dx = 8 - 16 + \frac{7}{2} = -\frac{9}{2}$$

$$\text{D'où } \int_0^{\ln 4} (e^{2x} - 4e^x) dx = -\frac{9}{2}$$

4) Tracer (D) et la courbe (C_f).



5) b) Calculer en cm² l'aire du domaine limité par (C), la droite (D), l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = \ln 4$

$$A = \int_0^{\ln 4} |f(x) - (2x - 2)| dx \text{ cm} \times \text{cm}$$

(C_f) se trouve en dessous de (D) sur $]-\infty, \ln 4]$

$$A = \int_0^{\ln 4} -(e^{2x} - 4e^x) dx (\text{cm}^2)$$

$$A = -\int_0^{\ln 4} (e^{2x} - 4e^x) dx (\text{cm}^2)$$

$$A = \frac{9}{2} (\text{cm}^2)$$

Partie II :

1) a) Résoudre l'équation différentielle

$$(E) : y'' - 3y' + 2y = 0$$

L'équation caractéristique de (E) est

$$r^2 - 3r + 2 = 0 \text{ donc } \Delta = 1$$

$$\text{Donc } r_1 = \frac{3+1}{2} = 2 \text{ et } r_2 = \frac{3-1}{2} = 1$$

Donc les solutions de (E) sont :

$$x \rightarrow \alpha e^{2x} + \beta e^x \text{ où } (\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$$

b) Déterminer la solution g de (E) tels que $g(0) = -3$ et $g'(0) = -2$

g est une solution de de(E) donc: $g(x) = \alpha e^{2x} + \beta e^x$

$$g(0) = -3 \Leftrightarrow \alpha e^{2 \times 0} + \beta e^0 = -3$$

$$\Leftrightarrow \alpha + \beta = -3 \quad (1)$$

$$g'(x) = 2\alpha e^{2x} + \beta e^x$$

$$g'(0) = -2 \Leftrightarrow 2\alpha e^{2 \times 0} + \beta e^0 = -2$$

$$\Leftrightarrow 2\alpha + \beta = -2 \quad (2)$$

$$(1) - (2) \Leftrightarrow 2\alpha + \beta - \alpha - \beta = -2 + 3 \Leftrightarrow \alpha = 1$$

$$\text{On a } \alpha + \beta = -3 \Leftrightarrow \beta = -3 - \alpha \Leftrightarrow \beta = -4$$

$$\text{D'où } g(x) = e^{2x} - 4e^x$$

2) Soit h la fonction définie sur $]\ln 4; +\infty[$ par :

$$h(x) = \ln(e^{2x} - 4e^x)$$

a) Montrer que h admet une fonction réciproque h^{-1} est définie sur $\mathbb{R}$.

$$h(x) = \ln(g(x))$$

On a g est continue strictement positive sur

$]\ln 4; +\infty[$ (car g est une solution de (E) donc deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et (C_f) se trouve au-dessus de (D) sur $]\ln 4; +\infty[$) et ln continue sur $]0; +\infty[$

Donc h est continue sur $]\ln 4; +\infty[$.

$$h'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{2(e^x - 2)}{e^x - 4} \quad \forall x \in]\ln 4; +\infty[$$

$$x > \ln 4 \Leftrightarrow e^x > e^{\ln 4} \Leftrightarrow e^x - 2 > 4 - 2$$

$$\text{Donc } \forall x \in]\ln 4; +\infty[\quad e^x - 2 > 2 \text{ et } e^x - 4 > 0$$

$$\text{Donc } \frac{2(e^x - 2)}{e^x - 4} > 0 \text{ donc } h'(x) > 0; \quad \forall x > \ln 4$$

Donc h est strictement croissante sur $]\ln 4; +\infty[$

Donc h admet une fonction réciproque h^{-1} est définie sur $h(]\ln 4; +\infty[)$

$$h(]\ln 4; +\infty[) = \left[\lim_{x \rightarrow (\ln 4)^+} h(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) \right[$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(e^{2x} - 4e^x) = +\infty$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^x(e^x - 4) = +\infty \text{ et } \lim_{t \rightarrow +\infty} \ln(t) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow (\ln 4)^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow (\ln 4)^+} \ln(e^{2x} - 4e^x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow (\ln 4)^+} (e^{2x} - 4e^x) = 0^+ \text{ et } \lim_{t \rightarrow 0^+} \ln(t) = -\infty$$

$$\forall x \in]\ln 4; +\infty[\quad e^{2x} - 4e^x > 0$$

b) Vérifier que $h(\ln 5) = \ln 5$ puis déterminer

$$(h^{-1})'(\ln 5)$$

$$h(\ln 5) = \ln(e^{2 \ln 5} - 4e^{\ln 5}) = \ln(e^{\ln 5^2} - 4 \times 5)$$

$$h(\ln 5) = \ln(25 - 20) = \ln 5$$

$$(h^{-1})'(\ln 5) = \frac{1}{h'(h(\ln 5))} = \frac{1}{h'(\ln 5)}$$

$$\text{Or } h'(\ln 5) = \frac{2(e^{\ln 5} - 2)}{e^{\ln 5} - 4} = \frac{2(5 - 2)}{5 - 4} = 6$$

$$\text{D'où } (h^{-1})'(\ln 5) = \frac{1}{6}$$