

Exercice 1 : (2015 Session annulée) (3pts)

Soit dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(\mathbf{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ les points $A(2; 1; 0)$, $B(-4; 1; 0)$ et soit (P) le plan passant par le point A et de vecteur normal $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.

- 1) Montrer que : $x + y - z - 3 = 0$ est une équation cartésienne du plan (P).
- 2) Soit (S) l'ensemble des points M de l'espace qui vérifient : $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$
Montrer que (S) est une sphère de centre $\Omega(-1; 1; 0)$ et son rayon $R = 3$
- 3) a) Calculer la distance du point Ω au plan (P) puis déduire que (P) coupe (S) suivant un cercle (C).
- b) Montrer que le centre du cercle (C) est $H(0; 2; -1)$.
- 4) Montrer que : $\vec{OH} \wedge \vec{OB} = \vec{i} + 4\vec{j} + 8\vec{k}$ puis calculer la surface du triangle OHB.

Exercice 2 : (2015 Session annulée) (3pts)

I - On considère le nombre complexe u tel que :

$$a = 2 + \sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

- 1) Montrer que le module du nombre complexe a est $2\sqrt{2 + \sqrt{2}}$
- 2) Vérifier que : $a = 2(1 + \cos \frac{\pi}{4}) + 2i \sin \frac{\pi}{4}$
- 3) a) En linéarisant $\cos^2 \theta$, θ est un nombre réel montrer que : $1 + \cos 2\theta = 2\cos^2 \theta$
- b) Montrer que $a = 4\cos \frac{\pi}{8}(\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8})$ est une forme trigonométrique du nombre a montrer que $a = (2\sqrt{2 + \sqrt{2}})^4 i$

II - On considère, Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(\mathbf{O}; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$ on considère les deux points Ω et A d'affixes respectives ω et a tels que : $\omega = \sqrt{2}$; $a = 2 + \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ et la rotation R de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

- 1) Montrer que l'affixe b du point B image du point A par la rotation R est $2i$.
- 2) Déterminer l'ensemble des points M d'affixes z tel que : $|z - 2i| = 2$

Exercice 3 : (2015 Session annulée) (3pts)

Une caisse U_1 contient 7 boules : quatre boules rouges et trois boules vertes (indiscernables au toucher).
Une caisse U_2 contient 5 boules : trois boules rouges et deux boules vertes (indiscernables au toucher).
I) On considère l'expérience suivante : on tire au hasard et en même temps 3 boules de U_1 .

Soit l'événements A " Obtenir une boule rouge et deux boules vertes " et l'événement B " Obtenir trois de la même couleur "

Montrer que $P(A) = \frac{12}{35}$ et $P(B) = \frac{1}{7}$

II) On considère l'expérience suivante : on tire au hasard et en même temps 2 boules de U_1 , puis on tire au hasard une boules de U_2 .
Soit C l'événement : " Obtenir trois boules rouges "

Montrer que $P(C) = \frac{6}{35}$

Problème : (2015 Session annulée) (8pts)

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{1}{x(1 - \ln x)}$$

(C_f) est la courbe représentative de f dans le repère orthonormé $(\mathbf{O}; \vec{i}; \vec{j})$ (unité : 2 cm)

I) 1) Montrer que : $D_f =]0; e[\cup]e; +\infty[$

2) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow e^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow e^-} f(x)$ puis interpréter les résultats géométriquement.

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ puis en déduire que (C_f)

admet une asymptote au voisinage de $+\infty$ dont on précisera une équation

c) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ puis interpréter les

résultats géométriquement (pour calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

(remarquer que $x(1 - \ln x) = x - x \ln x$)

3) a - Montrer que : $f'(x) = \frac{\ln x}{x^2(1 - \ln x)^2} \quad \forall x \in D_f$

b) Montrer que f est décroissante sur $]0, 1]$ et croissante sur chacun des intervalles $[1; e[$ et $]e; +\infty[$

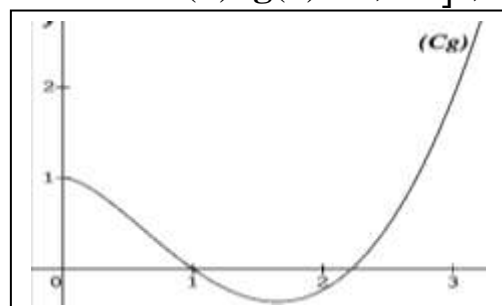
b - Dresser le tableau des variations de f sur D_f

II) Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = 1 - x^2(1 - \ln x)$$

(C_g) est la courbe représentative de g dans le repère orthonormé $(\mathbf{O}; \vec{i}; \vec{j})$ (voir figure)

1) a) Déterminer graphiquement de solution de l'équation suivante (E) : $g(x) = 0; x \in]0; +\infty[$



Année scolaire : 2022 – 2023

Examen national 2015 session normale
annulée

AGOUZAL

2 BPCF

b) On donne le tableau des valeurs suivantes :

| | | | | |
|------|--------|--------|------|------|
| x | 2,1 | 2,2 | 2,3 | 2,4 |
| g(x) | – 0,14 | – 0,02 | 0,12 | 0,28 |

Montrer que l'équation (E) admet une solution α telle que $2,2 < \alpha < 2,3$

2) a) Vérifier que : $\mathbf{f(x) - x = \frac{g(x)}{x(1-\ln x)} \quad \forall x \in D_f}$

b) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x$ coupe la courbe (C_f) en deux points d'abscisses 1 et α

c) Déterminer à partir de (C_g) le signe de la fonction g sur l'intervalle $[1; \alpha]$ et montrer que $\mathbf{f(x) - x \leq 0}$ pour tout x de $[1; \alpha]$

3) Tracer dans le même repère ($\mathbf{O; \vec{i}; \vec{j}}$), la droite (Δ) et la courbe (C_f).

4) a) Montrer que $\int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x(1-\ln x)} dx = \ln 2$ (remarquer que $\frac{1}{x(1-\ln x)} = \frac{\frac{1}{x}}{(1-\ln x)} \quad \forall x \in D_f$

b) Calculer en cm^2 l'aire du domaine plan délimité par (C_f) la droite (Δ) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \sqrt{e}$

III) On considère la suite (U_n) définie par :

$$U_{n+1} = \mathbf{f(U_n)} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad U_0 = 2$$

1) Montrer que : $1 \leq U_n \leq \alpha \quad \forall n \in \mathbb{N}$

2) Montrer que la suite (U_n) est décroissante (on pourra utiliser le résultat de la question II) 2) c))

3) En déduire que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite.