

Exercice 1 : (2014 S2) (3pts)

Soit dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct

$(\mathbf{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ le point $A(0, 0, 1)$, le plan (P) tel que :

(P) : $2x + y - 2z - 7 = 0$ et la sphère (S) de centre $\Omega(0, 3, -2)$ et de rayon $R = 3$

1) a – Montrer que $\begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = 1 - 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ est une

représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par A et perpendiculaire au plan (P).

b) Vérifier que $H(2, 1, -1)$ est le point d'intersection de (P) et (Δ)

2) a) posons $\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$, montrer que :

$$\overrightarrow{\Omega A} \wedge \vec{u} = 3(\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k})$$

b) Montrer que : $d(\Omega; (\Delta)) = 3$

c) En déduire que la droite (Δ) est tangente à la sphère (S) et vérifier que H est le point de tangence entre (Δ) et (S).

Exercice 2 : (2014 S2) (3pts)

Soit la suite (U_n) définie par :

$$U_{n+1} = \frac{5U_n - 4}{1 + U_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \text{et} \quad U_1 = 5$$

1) Montrer que : $U_n > 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

2) On pose $V_n = \frac{3}{U_n - 2} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

a) Montrer que $V_{n+1} = \frac{1 + U_n}{U_n - 2}$, en déduire que

(V_n) est une suite arithmétique de raison 1

b) Ecrire V_n en fonction de n, en déduire que :

$$U_n = 2 + \frac{3}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

c) Déterminer $\lim U_n$

Exercice 3 : (2014 S2) (3pts)

Pour déterminer les deux questions d'un concours de Recrutement, un candidat tire, successivement et sans remise deux fiches d'un sac contenant dix fiches : 8 fiches concernant les maths et 2 fiches concernant la langue française.

On considère les deux événements suivants:

A " Tirer deux fiches concernant la langue française "

B " Tirer deux fiches concernant deux matières différentes".

Montrer que Montrer que : $P(A) = \frac{1}{45}$ et $P(A) = \frac{16}{45}$

2) Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage fait correspondre le nombre de fiches de la langue française tirées.

a) Vérifier que les valeurs prises par X sont 0, 1 et 2.

b) Montrer que $p(X = 0) = \frac{28}{45}$ puis déterminer la

loi de probabilité de la variable aléatoire X.

Exercice 4 : (2014 S2) (3 pts)

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 4z + 5 = 0$

2) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct

$(\mathbf{O}; \vec{u}, \vec{v})$ on considère les points A, B, C, D et Ω

d'affixes respectives $a = 2 + i$; $b = 2 - i$; $c = i$; $d = -i$ et $\omega = 1$

a) Montrer que $\frac{a - \omega}{b - \omega} = i$

b) En déduire que le triangle ΩAB est rectangle et isocèle en Ω .

2) Soient z l'affixe du point M du plan et z' l'affixe du point M' image du point M par la rotation R de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

a) Montrer que $z' = iz + 1 - i$.

b) Vérifier que $R(A) = C$ et $R(D) = B$

c) Montrer que les points A, B, C et D appartiennent au même cercle dont on déterminera le centre.

Problème : (2014 S2) (8pts)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (xe^x - 1)e^x$$

(C) est la courbe représentative de f dans le repère orthonormé $(\mathbf{O}; \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 2 cm)

1) Montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ et interpréter le

résultat géométriquement.

2) a) Montrer que: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

b) En déduire que (C) admet une branche parabolique au voisinage de $+\infty$ dont on précisera la direction.

3) a) Montrer que $f'(x) = e^x(e^x - 1 + 2xe^x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Et vérifier que $f'(0) = 0$

b) Montrer que : $e^x - 1 \geq 0 \quad \forall x \in [0; +\infty[$ et

$$e^x - 1 \leq 0 \quad \forall x \in]-\infty; 0]$$

c) Montrer que f est croissante sur $[0; +\infty[$ et décroissante sur $] -\infty; 0]$ puis dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

4) a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[0; +\infty[$ et que $\frac{1}{2} < \alpha < 1$

(on admet $\frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}} < 1$)

b) Construire la courbe (C) dans le repère $(\mathbf{O}; \vec{i}, \vec{j})$. (On admet que la courbe (C) admet un point d'inflexion unique dont les coordonnées ne sont pas demandées).

5) A l'aide d'une intégration par parties montrer que :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} xe^{2x} dx = \frac{1}{4}$$

6) Calculer en cm^2 l'aire du domaine limité par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \frac{1}{2}$