

Exercice 1 : (2013 S1) (3pts)

Soit dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(\mathbf{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ les points $A(-1, 1, 0)$, $B(1, 0, 1)$ et $\Omega(1, 1, -1)$ et la sphère (S) de centre Ω et de rayon $R = 3$

1) a) **Montrer que:** $\vec{OA} \wedge \vec{OB} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ et **vérifier que** $x + y - z = 0$ est une équation cartésienne du plan (OAB).

On a $\vec{OA} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{OB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\vec{OA} \wedge \vec{OB} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$\vec{OA} \wedge \vec{OB} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$$

D'où $\vec{OA} \wedge \vec{OB} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$

Soit $M(x; y; z) \in (ABC)$

$\vec{OA} \wedge \vec{OB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (OAB)

(OAB) : $1x + 1y + (-1)z + d = 0$ or $O(0, 0, 0) \in (OAB)$

Donc $0 + 0 + 0 + d = 0$ donc $d = 0$

D'où (OAB) : $x + y - z = 0$

b) **Vérifier que:** $d(\Omega; (OAB)) = \sqrt{3}$ puis **montrer que** (OAB) coupe (S) suivant un cercle (Γ) de rayon $\sqrt{6}$.

(OAB) : $x + y - z = 0$ $\Omega(1; 1; -1)$

$$d(\Omega, (OAB)) = \frac{|1 + 1 - (-1)|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

D'où $d(\Omega, (OAB)) = \sqrt{3}$

On a $d(\Omega, (ABC)) = 3$ et $R = 3$

Donc $d(\Omega, (ABC)) < R$

Donc le plan (ABC) coupe la sphère (S) suivant un cercle (Γ) de rayon $\sqrt{3^2 - \sqrt{3}^2} = \sqrt{6}$

2) Soit (Δ) la droite passant par Ω et perpendiculaire au plan (OAB).

On a (Δ) est perpendiculaire au plan (OAB).

On a $\vec{OA} \wedge \vec{OB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (OAB)

Donc c'est un vecteur directeur de la droite (Δ)

Soit $M(x; y; z) \in (\Delta)$ (Δ) pass2 par $\Omega(1; 1; -1)$

$$(\Delta) : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = -1 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \text{ est une représentation}$$

paramétrique de la droite (Δ).

b) **Déterminer** le triplet de coordonnées du centre du cercle (Γ).

Soit H le centre du cercle (Γ) $(\Delta) \cap (OAB) = \{H\}$?

H est la projection orthogonale de Ω sur le plan (OAB)

$M(x; y; z) \in (\Delta) \cap (OAB)$ équivaut à

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = -1 - t \end{cases} \quad \text{donc } 1 + t + 1 + t + 1 + t = 0$$

$$x + y - z = 0$$

Donc $3t = -3 \Leftrightarrow t = -1$

$$\begin{cases} x = 1 - 1 = 0 \\ y = 1 - 1 = 0 \\ z = -1 + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{donc } H = O$$

d'où $O(0; 0; 0)$ est le centre du cercle (Γ)

Exercice 2 : (2013 S1) (3pts)

On considère, Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(\mathbf{O}; \vec{u}; \vec{v})$ on considère les points A , B et C

d'affixes respectives $\mathbf{a} = 7 + 2\mathbf{i}$, $\mathbf{b} = 4 + 8\mathbf{i}$, $\mathbf{c} = -2 + 5\mathbf{i}$

1) a) **Vérifier que :** $(1 + \mathbf{i})(-3 + 6\mathbf{i}) = -9 + 3\mathbf{i}$ et

Montrer que $\frac{\mathbf{c} - \mathbf{a}}{\mathbf{b} - \mathbf{a}} = 1 + \mathbf{i}$

$$(1 + \mathbf{i})(-3 + 6\mathbf{i}) = -3 + 6\mathbf{i} - 3\mathbf{i} + 6\mathbf{i}^2 = -3 - 6 + 3\mathbf{i}$$

Donc $(1 + \mathbf{i})(-3 + 6\mathbf{i}) = -9 + 3\mathbf{i}$

$$\frac{\mathbf{c} - \mathbf{a}}{\mathbf{b} - \mathbf{a}} = \frac{-2 + 5\mathbf{i} - 7 - 2\mathbf{i}}{4 + 8\mathbf{i} - 7 - 2\mathbf{i}} = \frac{-9 + 3\mathbf{i}}{-3 + 6\mathbf{i}}$$

Or $(1 + \mathbf{i})(-3 + 6\mathbf{i}) = -9 + 3\mathbf{i} \Leftrightarrow \frac{-9 + 3\mathbf{i}}{-3 + 6\mathbf{i}} = 1 + \mathbf{i}$

Donc $\frac{\mathbf{c} - \mathbf{a}}{\mathbf{b} - \mathbf{a}} = 1 + \mathbf{i}$

b) **En déduire que** $AC = AB\sqrt{2}$ et donner une mesure de l'angle orienté $(\vec{AB}; \vec{AC})$.

On a $\frac{\mathbf{c} - \mathbf{a}}{\mathbf{b} - \mathbf{a}} = 1 + \mathbf{i}$

$$\left| \frac{\mathbf{c} - \mathbf{a}}{\mathbf{b} - \mathbf{a}} \right| = |1 + \mathbf{i}| \Leftrightarrow \left| \frac{\mathbf{c} - \mathbf{a}}{\mathbf{b} - \mathbf{a}} \right| = \sqrt{1 + 1} \Leftrightarrow \frac{AC}{AB} = \sqrt{2}$$

D'où $AC = AB\sqrt{2}$

$$1 + \mathbf{i} = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \mathbf{i} \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathbf{i} \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

Donc $1 + \mathbf{i} = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + \mathbf{i} \sin \frac{\pi}{4} \right)$

On a $\frac{c-a}{b-a} = \sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$

Donc $\arg(\frac{c-a}{b-a}) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$

or $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) \equiv \arg(\frac{c-a}{b-a}) [2\pi]$

D'où $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$

2) Soit R la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

a) Montrer que l'affixe du point D image du point A par la rotation R est $d = 10 + 11i$

$$\begin{aligned} R(A) = D &\Leftrightarrow d - b = e^{i\frac{\pi}{2}}(a - b) \\ &\Leftrightarrow d = i(a - b) + b \Leftrightarrow d = i(7 + 2i - 4 - 8i) + 4 + 8i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow d = i(3 - 6i) + 4 + 8i \Leftrightarrow d = 3i - 6i^2 + 4 + 8i \\ &\Leftrightarrow d = 6 + 4 + 11i = 10 + 11i \end{aligned}$$

D'où $d = 10 + 11i$

b) Calculer $\frac{d-c}{b-c}$ et en déduire les points B, C et D sont alignés.

$$\frac{d-c}{b-c} = \frac{10+11i+2-5i}{4+8i+2-5i} = \frac{12+6i}{6+3i}$$

Donc $\frac{d-c}{b-c} = \frac{2(6+3i)}{6+3i} = 2$

On a $\frac{d-c}{b-c} = 2$ donc $\frac{d-c}{b-c} \in \mathbb{R}$ donc les points B, C et D sont alignés.

Exercice 3 : (2013 S1) (3pts)

Une caisse contient 10 boules : cinq boules rouges, trois boules vertes et deux boules blanches. (indiscernables au toucher).

On tire au hasard et simultanément quatre boules de la caisse.

1) On considère les deux événements :

A" Obtenir deux boules rouges et deux boules vertes"

B " aucune boule parmi les quatre tirées n'est blanche"

Montrer que $P(A) = \frac{1}{7}$ et $P(B) = \frac{1}{3}$

On tire au hasard et simultanément quatre boules de la caisse
5 R ; 3 V ; 2 B

$$\text{Card}(\Omega) = C_{10}^4 = 210$$

A" Obtenir deux boules rouges et deux boules vertes"

$$\text{Card}(A) = C_5^2 \times C_3^2 = 10 \times 3 = 30$$

$$P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{30}{210} = \frac{1}{7}$$

B " aucune boule parmi les quatre tirées n'est blanche"

$$\text{Card}(B) = C_8^4 = 70$$

$$P(B) = \frac{\text{Card}(B)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{70}{210} = \frac{1}{3}$$

D'où $P(A) = \frac{1}{7}$ et $P(B) = \frac{1}{3}$

2) Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage fait correspondre le nombre de boules blanches tirées.

a) Vérifier que les valeurs prises par X sont 0, 1 et 2. aucune boule parmi les quatre tirées n'est blanche donc X = 0.

Parmi les quatre tirées il y a une seule boule blanche donc X = 1

Parmi les quatre tirées il y a deux boules blanches donc X = 2

Et puisque la caisse contient seulement 2 boules blanches. les valeurs prises par X sont 0, 1 et 2.

b) Montrer que $P(X = 1) = \frac{8}{15}$ puis déterminer la

loi de probabilité de la variable aléatoire X.

$$P(X = 1) = \frac{C_2^1 \times C_8^3}{C_{10}^4} = \frac{2 \times 56}{210} = \frac{8}{15}$$

D'où $P(X = 1) = \frac{8}{15}$

$$P(X = 0) = P(B) = \frac{1}{3}$$

$$P(X = 2) = \frac{C_2^2 \times C_8^2}{C_{10}^4} = \frac{1 \times 28}{210} = \frac{2}{15}$$

X = k	0	1	2
P(X=k)	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{2}{15}$

$$(\frac{1}{3} + \frac{8}{15} + \frac{2}{15} = 1)$$

Exercice 3 : (2013 S1) (3pts)

Soit la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$U_{n+1} = \frac{25}{10 - U_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \text{et} \quad U_1 = 0$$

1) Vérifier que: $5 - U_{n+1} = \frac{5(5 - U_n)}{5 + (5 - U_n)} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

Et montrer par récurrence que: $5 - U_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

$$5 - U_{n+1} = 5 - \frac{25}{10 - U_n} = \frac{50 - 5U_n - 25}{10 - U_n}$$

$$5 - U_{n+1} = \frac{25 - 5U_n}{5 + 5 - U_n} = \frac{5(5 - U_n)}{5 + 5 - U_n}$$

D'où $5 - U_{n+1} = \frac{5(5 - U_n)}{5 + 5 - U_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

Montrer que : $5 - U_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

Pour n = 1 on a $U_1 = 0$ donc $5 - U_1 > 0$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ supposons que $5 - U_n > 0$ et

montrons que $5 - U_{n+1} > 0$

On a $5 - U_n > 0$ donc $5(5 - U_n) > 0$

et $5 + 5 - U_n > 5$ donc

$$5 - U_{n+1} = \frac{5(5 - U_n)}{5 + 5 - U_n} > 0$$

D'où $5 - U_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

2) On pose $V_n = \frac{5}{5 - U_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

a) Montrer que $V_{n+1} = \frac{10 - U_n}{5 - U_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$ puis

vérifier que $V_{n+1} - V_n = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

On a $V_n = \frac{5}{5 - U_n}$ donc $V_{n+1} = \frac{5}{5 - U_{n+1}}$

$$V_{n+1} = \frac{5}{5 - U_{n+1}} = \frac{10 - U_n}{5 - U_n}$$

D'où $V_{n+1} = \frac{10 - U_n}{5 - U_n}$

$$V_{n+1} - V_n = \frac{10 - U_n}{5 - U_n} - \frac{5}{5 - U_n} = \frac{5 - U_n}{5 - U_n} = 1$$

D'où $V_{n+1} - V_n = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

b) Montrer que : $V_n = n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$ et en déduire

que : $U_n = 5 - \frac{5}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

on a $V_{n+1} - V_n = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$ donc $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite arithmétique de raison 1 et de premier terme

$$V_1 = \frac{5}{5 - U_1} = \frac{5}{5 - 0} = 1 \text{ donc } V_1 = 1$$

Donc $V_n = V_1 + (n-1) \times 1 = 1 + n - 1 = n$

D'où $V_n = n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

On a $V_n = \frac{5}{5 - U_n}$ donc

$$5 - U_n = \frac{5}{V_n} \Leftrightarrow 5 - \frac{5}{V_n} = U_n$$

D'où $U_n = 5 - \frac{5}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

c) Déterminer $\lim U_n$

$$\lim U_n = \lim 5 - \frac{5}{n} = 5 \quad \text{car } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5}{n} = 0$$

D'où $\lim U_n = 5$

Problème :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x-2)^2 e^x$$

(C_f) est la courbe représentative de f dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1) a - Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter le résultat géométriquement.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-2)^2 e^x = +\infty$$

Car $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x-2)^2 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-2)^2 e^x}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-2)^2 \frac{e^x}{x} = +\infty \end{aligned}$$

Car $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x-2)^2 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

D'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ donc (C_f) admet une branche parabolique au voisinage de $+\infty$ de direction l'axe des ordonnées.

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et interpréter le résultat géométriquement.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x-2)^2 e^x$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 4x + 4) e^x$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^x - 4x e^x + 4e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^x = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

D'où $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ la droite d'équation $y = 0$ est

une asymptote horizontale au voisinage de $-\infty$

2) a) Montrer que $f'(x) = x(x-2)e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = (x-2)^2 e^x$$

$$f'(x) = 2(x-2)e^x + (x-2)^2 e^x$$

$$f'(x) = (x-2)e^x (2 + x - 2) = x(x-2)e^x$$

D'où $f'(x) = x(x-2)e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

b) Montrer que f est croissante sur $]-\infty, 0]$ et sur $[2, +\infty[$ et est décroissante sur $[0; 2]$

On a $f'(x) = x(x-2)e^x \quad e^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Donc le signe de $f'(x)$ est celui de $x(x-2)$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 2$$

X	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$x(x-2)$	+	0	-	0	+

$$\forall x \in]-\infty; 0] \cup [2; +\infty[\quad f'(x) \geq 0$$

Donc f est croissante sur $]-\infty, 0]$ et sur $[2, +\infty[$

$$\forall x \in [0; 2] \quad f'(x) \leq 0$$

Donc f est décroissante sur $[0; 2]$

c) Dresser le tableau des variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
f'(x)	+	0	-	0	+
f(x)		4	0	$+\infty$	

3) a) Montrer que $f''(x) = (x^2 - 2)e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Et en déduire que (C_f) admet deux points d'inflexions (les ordonnées des points ne sont pas demandées)

On a $f'(x) = x(x-2)e^x$ donc $f'(x) = (x^2 - 2x)e^x$

$$f''(x) = (2x - 2)e^x + (x^2 - 2x)e^x$$

$$f''(x) = (2x - 2 + x^2 - 2x)e^x = (x^2 - 2)e^x$$

$$D'où \quad f''(x) = (x^2 - 2)e^x \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad e^x > 0$$

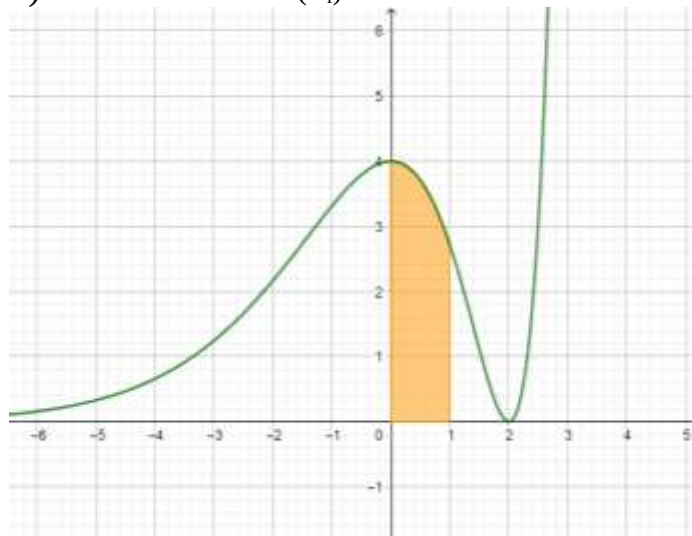
Donc le signe de $f''(x)$ est celui de $(x^2 - 2)$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 2) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{2} \text{ ou } x = -\sqrt{2}$$

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$+\infty$	
f''(x)	+	0	-	0	+

D'où (C_f) admet deux points d'inflexions d'abscisses respectifs $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$

b) Construire la courbe (C_f) .



4) a) Montrer que $H: x \rightarrow (x-1)e^x$ est une primitive de $h: x \rightarrow xe^x$ sur $\mathbb{R}$ Puis calculer $\int_0^1 xe^x dx$

$$H(x) = (x-1)e^x$$

$$H'(x) = (x-1)'e^x + (x-1)(e^x)'$$

$$H'(x) = e^x + (x-1)e^x = (1+x-1)e^x = xe^x$$

$$H'(x) = h(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

D'où $H: x \rightarrow (x-1)e^x$ est une primitive de

$h: x \rightarrow xe^x$ sur $\mathbb{R}$

$$\int_0^1 xe^x dx = \int_0^1 h(x) dx = [H(x)]_0^1$$

$$\int_0^1 xe^x dx = H(1) - H(0) = 0 - (-1)e^0 = 1$$

$$D'où \quad \int_0^1 xe^x dx = 1$$

b) A l'aide d'une intégration par parties montrer que:

$$\int_0^1 x^2 e^x dx = e - 2$$

$$u(x) = x^2$$

$$u'(x) = 2x$$

$$v'(x) = e^x$$

$$v(x) = e^x$$

$$\int_0^1 x^2 e^x dx = \left[x^2 e^x \right]_0^1 - \int_0^1 2x e^x dx$$

$$\int_0^1 x^2 e^x dx = e - 2 \int_0^1 x e^x dx = e - 2$$

$$D'où \quad \int_0^1 x^2 e^x dx = e - 2$$

c- Montrer que l'aire du domaine limité par (C_f) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$ est $5(e-2) \text{ cm}^2$.

$$A = \left(\int_0^1 f(x) dx \right) \text{ cm}^2$$

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (x-2)^2 e^x dx = \int_0^1 (x^2 - 4x + 4) e^x dx$$

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 x^2 e^x dx - 4 \int_0^1 x e^x dx + 4 \int_0^1 e^x dx$$

$$\int_0^1 f(x) dx = e - 2 - 4 + 4 \left[e^x \right]_0^1 = e - 6 + 4(e - 1)$$

$$\int_0^1 f(x) dx = 5e - 10 = 5(e - 2)$$

$$D'où \quad A = 5(e - 2) \text{ cm}^2$$

5) Utiliser la courbe (C_f) pour donner le nombre des

solutions de l'équation $x^2 = e^{-x} + 4x - 4$; $x \in \mathbb{R}$

$$x^2 - 4x + 4 = \frac{1}{e^x} \Leftrightarrow (x-2)e^x = 1 \Leftrightarrow f(x) = 1$$

Le nombre des solutions de l'équation $f(x) = 1$ est égale au nombre de point d'intersection entre la courbe (C_f) et la droite (D) d'équation $y = 1$

La droite (D) coupe la courbe (C_f) en 3 points d'où L'équation $f(x) = 1$ admet 3 solutions

