Année scolaire : 2022 – 2023	Solution de l'examen national 2012 SN	AGOUZAL 2 BPCF - 2 BSVTF

Exercice 1 :

Soit dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ les points A(1;1;-1), B(0;1;-2) et C(3;2;1) et (S) la sphère d'équation: $x^2+y^2+z^2-2x-2z-1=0$

1) Montrer que (S) est de centre Ω(1 ; 0 ;1) et de rayon $\sqrt{3}$

$(S):\ x^2+y^2+z^2-2x-2z-1=0;$

$a=\frac{-2}{-2}\ ;\ \ b=\frac{0}{-2};\ \ c=\frac{-2}{-2};\ \ d=-1$

Donc $a=1\ ;\ b=0;\ c=1;\ d=-1$

$a^2+b^2+c^2-d=1^2+0^2+1^2+1=3>0$

Donc le centre de (S) est $\Omega(1;0;1)$ et $R=\sqrt{3}$

D'où $\Omega(1;0;1)$ et rayon $R=\sqrt{3}$

2) a) Montrer que : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{i}-\vec{k}$ et vérifier que : $x-z-2=0$ est une équation cartésienne du plan (ABC).

C(3;2;1) ; B(0;1;-2) ; A(1;1;-1)

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}0&1\\-1&2\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}-1&2\\-1&2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}-1&2\\0&1\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=\vec{i}-\vec{k}$$

D'où $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{i}-\vec{k}$

Soit M(x ;y ;z)∈ (ABC)

$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (ABC)

(ABC) : 1x + 0×y – 1 z + d = 0 or B(0;1;-2) ∈(ABC)

(ABC) : x – z + d = 0 or B(0;1;-2) ∈(ABC)

Donc 0 – (–2) + d = 0 donc d = – 2

D'où $(ABC):x-z-2=0$

b) Vérifier que : $d(\Omega,(ABC))=\sqrt{2}$ puis montrer que le plan (ABC) coupe la sphère (S) suivant un cercle (Γ) de rayon 1.

$(ABC):x-z-2=0 \qquad \Omega(1;0;1)$

$$d(\Omega,(ABC))=\frac{|1-1-2|}{\sqrt{1^2+0^2+1^2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

D'où $d(\Omega,(ABC))=\sqrt{2}$

On a $d(\Omega,(ABC))=\sqrt{2}$ et $R=\sqrt{3}$

Donc $d(\Omega,(ABC))<R$

Donc le plan (ABC) coupe la sphère selon un cercle (Γ)

De rayon $\sqrt{\sqrt{3}^2-\sqrt{2}^2}=\sqrt{3-2}=1$

3) Soit (Δ) la droite passant par Ω et perpendiculaire au plan (ABC).

a) Montrer que $\begin{cases}x=1+t\\y=0\\z=1-t\end{cases}$ (t ∈ ℝ) est une représentation paramétrique de la droite (Δ).

On a (Δ) est perpendiculaire au (ABC).

Donc $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(1;0;-1)$ est un vecteur normal au plan (ABC) donc c'est un vecteur directeur de (Δ)

Soit M(x ;y ;z)∈ (ABC) $\qquad \Omega(1;0;1)$

$(\Delta):\begin{cases}x=1+t\\y=0\\z=1-t\end{cases}$ (t ∈ ℝ) est une représentation paramétrique de la droite (Δ).

b) Montrer que le triplet de coordonnées de H point d'intersection du plan (ABC) et de la droite (Δ) est (2;0;0)

$M(x;y;z)\in(\Delta)\cap(ABC)$ équivaut à

$\begin{cases}x=1+t\\y=0\\z=1-t\\x-z-2=0\end{cases}$

$(1+t)-(1-t)-2=0$

Donc $1+t-1+t-2=0\Leftrightarrow 2t=2\Leftrightarrow t=1$

$\begin{cases}x=1+1\\y=0\\z=1-1\end{cases}$ d'où $H(2;0;0)$

$(\Delta)\cap(ABC)=\{H(2;0;0)\}$

c) En déduire le centre du cercle (Γ)

H est la projection orthogonale de Ω sur le plan (ABC)

Donc $H(2;0;0)$ est le centre du cercle (Γ)

Exercice 2 :

1) Résoudre dans ℂ l'équation : $Z^2-12Z+61=0$

$Z^2-12Z+61=0$

$\Delta=(12)^2-4\times1\times61=144-244=-100$

Don l'équation admet deux solutions complexes conjuguées :

$z_1=\frac{12+i\sqrt{100}}{2}=\frac{12+10i}{2}=6+5i$ et $z_2=\overline{z_1}=6-5i$

D'où $S=\{6+5i;6-5i\}$

2) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$ on considère les points A , B et C d'affixes respectives $a=6-5i$, $b=4-2i$, $c=2+i$

a) Calculer $\frac{a-c}{b-c}$ et en déduire que A, B et C sont alignés.

$$\frac{a-c}{b-c}=\frac{6-5i-2-i}{4-2i-2-i}=\frac{4-6i}{2-3i}$$

$$\frac{a-c}{b-c}=\frac{2(2-3i)}{2-3i}=2$$

On a $\frac{a-c}{b-c}=2$ donc $\frac{a-c}{b-c}\in\mathbb{R}$

D'où A, B et C sont alignés.

On considère la translation T de vecteur $\vec{u}$ d'affixe **1 + 5i**

b) Vérifier que l'affixe du point D image du point C par la translation T est d = 3 + 6i

$$T(C)=D\Leftrightarrow d=c+aff(\vec{u})\Leftrightarrow d=2+i+1+5i$$

D'où $d=3+6i$

c) Montrer que $\frac{d-c}{b-c}=-1+i$ et que $\frac{3\pi}{4}$ est un argument de $-1+i$

$$\frac{d-c}{b-c}=\frac{3+6i-2-i}{4-2i-2-i}=\frac{1+5i}{2-3i}$$

$$\frac{d-c}{b-c}=\frac{(1+5i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)}=\frac{2-15+3i+10i}{2^2+3^2}$$

$$\frac{d-c}{b-c}=\frac{13(-1+i)}{13}=-1+i$$

D'où $\frac{d-c}{b-c}=-1+i$

$$|-1+i|=\sqrt{(-1)^2+1}=\sqrt{2}$$

$$-1+i=\sqrt{2}(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2})=\sqrt{2}(-\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$$

$$-1+i=\sqrt{2}(\cos(\pi-\frac{\pi}{4})+i\sin(\pi-\frac{\pi}{4}))$$

Donc $\frac{d-c}{b-c}=\sqrt{2}(\cos(\frac{3\pi}{4})+i\sin(\frac{3\pi}{4}))$

D'où $\arg(\frac{d-c}{b-c})\equiv\frac{3\pi}{4}[2\pi]$

d) En déduire une mesure de l'angle $(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CD})$

On sait que $(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CD})\equiv\arg(\frac{d-c}{b-c})[2\pi]$

D'où $(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CD})\equiv\frac{3\pi}{4}[2\pi]$

Exercice 3 :

Un sac contient huit jetons, indiscernables au toucher : un jeton porte le chiffre 0, cinq jetons portent le chiffre 1
Et deux jetons portent les chiffres 2.
On tire simultanément et au hasard trois jetons du sac.

1) A ″ Obtenir trois jetons portant des chiffres différents deux à deux ″ Montrer que : $P(A)=\frac{5}{28}$

5 (1) ; 2 (2) ; 1 (0)

$$Card(\Omega)=C_8^3=56$$

$$Card(A)=C_5^1\times C_2^1\times C_1^1=10$$

$$P(A)=\frac{Card(A)}{Card(\Omega)}=\frac{10}{56}=\frac{5}{28}$$

2) B ″la somme des chiffres portés par les jetons tirées est égal à 5 ″. Montrer que : $P(B)=\frac{5}{56}$

2 + 2 + 1 = 5

$$Card(B)=C_2^2\times C_5^1=5$$

$$P(B)=\frac{Card(B)}{Card(\Omega)}=\frac{5}{56}$$

3) C ″la somme des chiffres portés par les jetons tirées est égal à 4 ″ Montrer que : $P(C)=\frac{3}{8}$

2 + 2 + 0 = 4 ; 2 + 1 + 1 = 4

$$Card(C)=C_2^2\times C_1^1+C_5^2\times C_2^1=21$$

$$P(C)=\frac{Card(C)}{Card(\Omega)}=\frac{21}{56}=\frac{3}{8}$$

Exercice 4 :

On considère la suite (U_n) définie par :

$$U_{n+1}=\frac{10}{11}U_n+\frac{12}{11}\quad\forall n\in\mathbb{N}\quad\text{et}\quad U_0=11$$

1) Montrer que: $U_{n+1}-12=\frac{10}{11}(U_n-12)\quad\forall n\in\mathbb{N}$

$$U_{n+1}-12=\frac{10}{11}U_n+\frac{12}{11}-12=\frac{10}{11}U_n-\frac{120}{11}$$

Donc $U_{n+1}-12=\frac{10}{11}U_n-\frac{120}{11}$

D'où $U_{n+1}-12=\frac{10}{11}(U_n-12)$

2) a) Montrer que : $U_n<12\quad\forall n\in\mathbb{N}$

Pour n = 0 on a $U_0=11$ donc $U_0<12$

Soit $n\in\mathbb{N}$ supposons que $U_n<12$ et montrons que $U_{n+1}<12$ c'est-à-dire $U_{n+1}-12<0$

On a

$$U_n<12\Leftrightarrow U_n-12<0\Leftrightarrow\frac{10}{11}(U_n-12)<0$$

Or $U_{n+1}-12=\frac{10}{11}(U_n-12)$ donc $U_{n+1}-12<0$

D'où $U_n<12\quad\forall n\in\mathbb{N}$

b) Montrer que (U_n) est strictement croissante

$$U_{n+1}-U_n=\frac{10}{11}U_n+\frac{12}{11}-U_n$$

Donc $U_{n+1}-U_n=\frac{10U_n-11U_n+12}{11}$

Donc $U_{n+1}-U_n=\frac{12-U_n}{11}$ or $U_n<12$

Donc $12-U_n>0$ donc $U_{n+1}-U_n>0$

D'où (U_n) est strictement croissante.

c) En déduire que (U_n) est convergente.
On a (U_n) est strictement croissante et majorée donc (U_n) est convergente.

3) On considère la suite (V_n) définie par :

$$V_n = U_n - 12 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{10}{11}$ puis écrire V_n en fonction de n.

Montrons que $V_{n+1} = \frac{10}{11} V_n$

Donc $V_{n+1} = U_{n+1} - 12$ or $U_{n+1} - 12 = \frac{10}{11}(U_n - 12)$

Donc $V_{n+1} = \frac{10}{11}(U_n - 12)$

Donc $V_{n+1} = \frac{10}{11} V_n$

D'où (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{10}{11}$ et de premier terme $V_0 = U_0 - 12 = 11 - 12 = -1$

On a $V_n = V_0\left(\frac{10}{11}\right)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

D'où $V_n = -\left(\frac{10}{11}\right)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

b) Montrer que $U_n = 12 - \left(\frac{10}{11}\right)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ puis calculer $\lim U_n$

On a $V_n = U_n - 12$ donc $U_n = V_n + 12 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

D'où $U_n = 12 - \left(\frac{10}{11}\right)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

On a $\lim\left(\frac{10}{11}\right)^n = 0$ car $-1 < \frac{10}{11} < 1$

D'où $\lim U_n = 12$

Problème :

I) On considère la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$g(x) = x^2 - 1 + 2x^2 \ln x$$

1) a) Montrer que $x^2 - 1$ et $2x^2 \ln x$ ont même signe Sur $]0,1[$ et en déduire que $\forall x \in]0,1]$ $g(x) \le 0$

$\forall x \in]0,1[\quad 0 < x < 1$ et $\ln x < 0$

$0 < x^2 < 1$ et $\ln x < 0 \qquad x^2 > 0$

Donc $-1 < x^2 - 1 < 0$ et $2x^2 \ln x < 0$

Donc $x^2 - 1$ et $2x^2 \ln x$ ont même signe Sur $]0,1[$

On a $x^2 - 1 < 0$ et $2x^2 \ln x < 0 \quad \forall x \in]0,1[$

Donc $x^2 - 1 + x^2 \ln x < 0 \quad \forall x \in]0,1[$

D'où $g(x) < 0 \quad \forall x \in]0,1[$

b) Montrer que $x^2 - 1$ et $x^2 \ln x$ ont même signe Sur $]1,+\infty[$ et en déduire que $\forall x \in [1,+\infty[$ $g(x) \ge 0$

$\forall x \in]1,+\infty[\quad x > 1$ donc $x^2 > 1$ donc $x^2 - 1 > 0$

$\forall x \in]1,+\infty[\quad x > 1$ donc $\ln x > \ln 1$ donc $\ln x > 0$

Car ln est strictement croissante sur $]0,+\infty[$

Donc $x^2 - 1$ et $2x^2 \ln x$ ont même signe Sur $]1,+\infty[$

On a $x^2 - 1 > 0$ et $2x^2 \ln x > 0 \quad \forall x \in]1,+\infty[$

$\forall x \in]1,+\infty[\quad x^2 - 1 + 2x^2 \ln x > 0$

On a $\forall x \in [1,+\infty[\quad x^2 - 1 \ge 0$ et $2x^2 \ln x \ge 0$

Donc $\forall x \in [1,+\infty[\quad x^2 - 1 + 2x^2 \ln x \ge 0$

D'où $\forall x \in [1,+\infty[\quad g(x) \ge 0$

II) On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par

$$f(x) = (x^2 - 1)\ln x$$

(C_f) est la courbe représentative de f dans le repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unité : 3 cm)

1) a) Montrer que $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ et en déduire une interprétation géométrique du résultat.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (x^2 - 1)\ln x = +\infty$$

Car $\lim_{x\to 0^+} (x^2 - 1) = -1$ et $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$

D'où $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$

On a $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ la droite d'équation $x = 0$ est une asymptote verticale à la courbe (C).

b) Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ Montrer que $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ puis en déduire une interprétation géométrique du résultat

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (x^2 - 1)\ln x = +\infty$$

Car $\lim_{x\to+\infty} (x^2 - 1) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$

D'où $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x^2 - 1)\ln x}{x}$$

Donc $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2}{x} - \frac{1}{x}\right)\ln x$

Donc $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(x - \frac{1}{x}\right)\ln x = +\infty$

Car $\lim_{x\to+\infty} \left(x - \frac{1}{x}\right) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$

D'où $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ la courbe (C_f) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

2) a) Montrer que $\mathbf{f'(x)=\frac{g(x)}{x}}$ $\quad \forall \mathbf{x} \in]0,+\infty[$

Et interpréter géométriquement le résultat $\mathbf{f'(1)=0}$

$$\mathbf{f(x)=(x^2-1)\ln x}$$

$$\mathbf{f'(x)=2x\ln x+(x^2-1)\frac{1}{x}=\frac{(x^2-1)+2x^2\ln x}{x}}$$

D'où $\mathbf{f'(x)=\frac{g(x)}{x}}$ $\quad \forall \mathbf{x} \in]0,+\infty[$

$$\mathbf{f'(1)=\frac{g(1)}{1}=0}$$

$\mathbf{f'(1)=0}$ la courbe $(\mathbf{C_f})$ admet une tangente horizontal au point d'abscisse 1

b) En déduire que f est décroissante sur $]0,1]$ et croissante sur $[1,+\infty[$

$$\mathbf{f'(x)=\frac{g(x)}{x}} \quad \forall \mathbf{x} \in]0,+\infty[$$

On a $\forall \mathbf{x} \in]0,1]$ $\mathbf{g(x)\le 0}$ donc $\mathbf{f'(x)\le 0}$ $\forall \mathbf{x} \in]0,1]$

Donc f est décroissante sur $]0,1]$

On a $\forall \mathbf{x} \in [1,+\infty[$ $\mathbf{g(x)\ge 0}$ donc $\mathbf{f'(x)\le 0}$ $\forall \mathbf{x} \in [1,+\infty[$

Donc f est croissante sur $[1,+\infty[$.

c) Dresser le tableau des variations de f et montrer que $\mathbf{f(x)\ge 0}$ $\quad \forall \mathbf{x} \in]0,+\infty[$

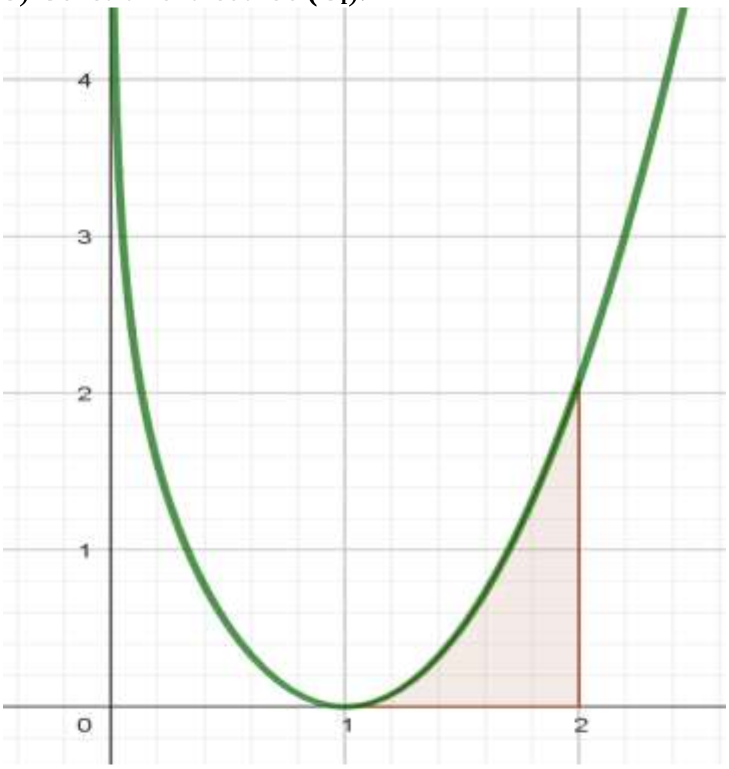
x	0		1		$+\infty$
f′(x)		–	0	+	
f(x)	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

On a f(1) = 0 est le minimum de f sur I

Donc $\quad \mathbf{f(x)\ge f(1)} \quad \forall \mathbf{x} \in]0,+\infty[$

D'où $\quad \mathbf{f(x)\ge 0} \quad \forall \mathbf{x} \in]0,+\infty[$

3) Construire la courbe $(\mathbf{C_f})$.



4) a – Montrer que $\mathbf{u : x \to \frac{x^3}{3} - x}$ est une primitive de la fonction $\mathbf{v : x \to x^2 - 1}$ sur $\mathbb{R}$

$$\mathbf{u'(x)=\left(\frac{x^3}{3}-x\right)'=\frac{1}{3}3x^2-1=x^2-1} \quad \forall \mathbf{x}\in\mathbb{R}$$

D'où $\mathbf{u : x \to \frac{x^3}{3} - x}$ est une primitive de la fonction $\mathbf{v : x \to x^2 - 1}$ sur $\mathbb{R}$

b) A l'aide d'une intégration par parties montrer que :

$$\int_1^2 (x^2-1)\ln x\,dx=\frac{2}{9}(1+3\ln 2)$$

$\mathbf{u(x)=\ln x}$ $\qquad \mathbf{u'(x)=\frac{1}{x}}$

$\mathbf{v'(x)=x^2-1}$ $\qquad \mathbf{v(x)=\frac{1}{3}x^3-x}$

$$\mathbf{\int_1^2 (x^2-1)\ln x\,dx=\left[(\tfrac{1}{3}x^3-x)\ln x\right]_1^2-\int_1^2(\tfrac{1}{3}x^3-x)\tfrac{1}{x}dx}$$

$$\mathbf{=(\tfrac{8}{3}-2)\ln 2-\int_1^2(\tfrac{1}{3}x^2-1)dx=\tfrac{2}{3}\ln 2-\left[\tfrac{1}{9}x^3-x\right]_1^2}$$

$$\mathbf{=\tfrac{2}{3}\ln 2-(\tfrac{8}{9}-2-\tfrac{1}{9}+1)=\tfrac{2}{3}\ln 2-\tfrac{7}{9}+1=\tfrac{2}{3}\ln 2+\tfrac{2}{9}}$$

D'où $\mathbf{\int_1^2 (x^2-1)\ln x\,dx=\frac{2}{9}(1+3\ln 2)}$

c – Calculer en cm² l'aire du domaine limité par (C_f) ; l'axe des abscisses et les droites d'équations x = 1 et x = 2.

$$\mathbf{A=\int_1^2 |f(x)|\,dx\times 3cm\times 3cm}$$

$$\mathbf{A=\int_1^2 (x^2-1)\ln x\,dx\times 9cm^2=\frac{2}{9}(1+3\ln 2)9cm^2}$$

D'où $\mathbf{A=(2+6\ln 2)cm^2}$