

**Exercice 1 : (2,5 pts)**

1) a - Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation suivante :

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

b - Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation suivante :

$$e^x - \frac{3}{e^x} - 2 = 0$$

2) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'inéquation suivante :

$$e^{x+1} - e^{-x} \geq 0$$

**Exercice 2 : (4 pts)**

1) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation :  $Z^2 - 6Z + 18 = 0$

2) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}; \vec{v})$  on considère les points A et B

d'affixes respectives  $a = 3 + 3i$  ,  $b = 3 - 3i$

a - Ecrire a et b sous forme trigonométrique

b - Montrer que b' l'affixe du point B' image du point

B par la translation de vecteur  $\vec{OA}$  est 6

c - Montrer que :  $\frac{b-b'}{a-b'} = i$  puis en déduire que le

triangle AB'B est isocèle et rectangle en B'.

d - En déduire que le quadrilatère OAB'B est un carré

**Exercice 3 : (3,5 pts)**

On considère la suite  $(U_n)$  définie par :

$$U_{n+1} = \frac{6U_n}{15U_n + 1} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad U_0 = 1$$

1) a - Montrer que:  $U_{n+1} - \frac{1}{3} = \frac{U_n - \frac{1}{3}}{15U_n + 1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

b - Montrer que :  $U_n > \frac{1}{3} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

2) On considère la suite  $(V_n)$  définie par :

$$V_n = 1 - \frac{1}{3U_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Montrer que  $(V_n)$  est une suite géométrique de raison

$\frac{1}{6}$  puis écrire  $V_n$  en fonction de n.

3) Montrer que  $U_n = \frac{1}{3 - 2\left(\frac{1}{6}\right)^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$  et en

déduire  $\lim U_n$

**Problème : : (10 pts)**

**Partie I :**

On considère la fonction g définie sur  $I = ]0; +\infty[$   
par :  $g(x) = x - 1 + \ln x$

1) a - Montrer que  $g'(x) = \frac{x+1}{x} \quad \forall x \in I$

b - Montrer que g est croissante sur I

2) En déduire que :  $g(x) \geq 0$  sur  $[1, +\infty[$   
et  $g(x) \leq 0$  sur  $]0, 1]$  (Remarquer que  $g(1) = 0$ )

**Deuxième partie**

On considère la fonction f définie sur  $I = ]0; +\infty[$

par :  $f(x) = \left(\frac{x-1}{x}\right) \ln x$

$(C_f)$  est la courbe représentative de f dans le repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  (unité : 1 cm)

1) a - Montrer que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$  et

interpréter le résultat géométriquement.

b - Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$

(Remarquer que  $\frac{f(x)}{x} = \left(\frac{x-1}{x}\right) \frac{\ln x}{x} \quad \forall x \in I$ )

c - En déduire que la courbe  $(C_f)$  admet au voisinage de  $+\infty$  une branche parabolique de direction à déterminer.

2) a - Montrer que  $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2} \quad \forall x \in I$

b - En déduire que f est croissante sur  $[1, +\infty[$   
et décroissante sur  $]0, 1]$ .

c - Dresser le tableau des variations de f.

3) Construire la courbe  $(C_f)$  (on admettra que  $(C_f)$  possède un seul point d'inflexion dont l'abscisse est comprise entre 1,5 et 2).

4) a - Montrer que  $H: x \rightarrow \frac{1}{2}(\ln x)^2$  est une primitive de  $h: x \rightarrow \frac{\ln x}{x}$  sur  $]0; +\infty[$

b - Montrer que :  $\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{2}$

c - A l'aide d'une intégration par parties montrer que :  $\int_1^e \ln x dx = 1$

5) a - Vérifier que :  $f(x) = \ln x - \frac{\ln x}{x} \quad \forall x \in I$

b - Montrer que l'aire du domaine limité par  $(C_f)$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = 1$  et  $x = e$  est  $0,5 \text{ cm}^2$ .