

Exercice 1 : (2,5 pts)

1) a - Résoudre dans \mathbb{R} l'équation suivante :

$$\mathbf{x}^2 - 2\mathbf{x} - 3 = 0$$

$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 16 > 0$ l'équation admet deux solutions distinctes.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= \frac{2 + \sqrt{16}}{2} & \mathbf{x}_2 &= \frac{2 - \sqrt{16}}{2} \\ &= \frac{2 + 4}{2} = 3 & &= \frac{2 - 4}{2} = -1 \end{aligned}$$

$$\mathbf{S} = \{-1; 3\}$$

b - Résoudre dans \mathbb{R} l'équation suivante :

$$\mathbf{e}^{\mathbf{x}} - \frac{3}{\mathbf{e}^{\mathbf{x}}} - 2 = 0 \quad \mathbf{e}^{\mathbf{x}} > 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}$$

$$\frac{(\mathbf{e}^{\mathbf{x}})^2 - 2\mathbf{e}^{\mathbf{x}} - 3}{\mathbf{e}^{\mathbf{x}}} = 0 \Leftrightarrow (\mathbf{e}^{\mathbf{x}})^2 - 2\mathbf{e}^{\mathbf{x}} - 3 = 0$$

$$\begin{aligned} \text{On pose } \mathbf{t} &= \mathbf{e}^{\mathbf{x}} \text{ donc } \mathbf{t}^2 - 2\mathbf{t} - 3 = 0 \\ &\text{donc } \mathbf{t} = 3 \text{ ou } \mathbf{t} = -1 \\ \text{donc } \mathbf{e}^{\mathbf{x}} &= 3 \text{ ou } \mathbf{e}^{\mathbf{x}} = -1 \text{ or } \mathbf{e}^{\mathbf{x}} > 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R} \\ \text{donc } \mathbf{e}^{\mathbf{x}} &= 3 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \ln 3 \end{aligned}$$

$$\text{D'où } \mathbf{S} = \{\ln 3\}$$

2) Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^{\mathbf{x}+1} - \mathbf{e}^{-\mathbf{x}} &\geq 0 \\ \mathbf{e}^{\mathbf{x}+1} - \mathbf{e}^{-\mathbf{x}} \geq 0 &\Leftrightarrow \mathbf{e}^{\mathbf{x}+1} \geq \mathbf{e}^{-\mathbf{x}} \Leftrightarrow \mathbf{x} + 1 \geq -\mathbf{x} \\ \Leftrightarrow 2\mathbf{x} \geq -1 &\Leftrightarrow \mathbf{x} \geq -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{D'où } \mathbf{S} = \left[-\frac{1}{2}; +\infty \right[$$

Exercice 2 : (4 pts)

1) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation : $\mathbf{Z}^2 - 6\mathbf{Z} + 18 = 0$

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 18 = -36 < 0$$

$$= (6i)^2$$

Donc l'équation admet deux solutions complexes conjuguées :

$$\mathbf{z}_1 = \frac{6 + 6i}{2} = 3 + 3i \quad \text{et} \quad \mathbf{z}_2 = \overline{\mathbf{z}_1} = 3 - 3i$$

$$\text{D'où } \mathbf{S} = \{3 - 3i; 3 + 3i\}$$

2) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(\mathbf{O}; \mathbf{u}; \mathbf{v})$ on considère les points A et B d'affixes respectives $\mathbf{a} = 3 + 3i$, $\mathbf{b} = 3 - 3i$

a - Ecrire a et b sous forme trigonométrique

$$|\mathbf{a}| = |3(1+i)| = 3|1+i| = 3\sqrt{1^2 + 1^2} = 3\sqrt{2}$$

$$\mathbf{a} = 3(1+i) = 3\sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}) = 3\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2})$$

$$= 3\sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i\sin \frac{\pi}{4}) \quad \text{d'où } \mathbf{a} = \left[3\sqrt{2}; \frac{\pi}{4} \right]$$

$$\text{On a } \mathbf{b} = \overline{\mathbf{a}} \quad \text{donc } \mathbf{b} = \left[3\sqrt{2}; -\frac{\pi}{4} \right]$$

b - Montrer que \mathbf{b}' l'affixe du point B' image du point B par la translation de vecteur $\overrightarrow{\mathbf{OA}}$ est 6

\mathbf{b}' image du point B par la translation de vecteur $\overrightarrow{\mathbf{OA}}$

$$\text{Donc } \mathbf{b}' = \mathbf{b} + \text{aff}(\overrightarrow{\mathbf{OA}}) = \mathbf{b} + \mathbf{a}$$

$$\mathbf{b}' = 3 - 3i + 3 + 3i = 6 \quad \text{d'où } \mathbf{b}' = 6$$

c - Montrer que : $\frac{\mathbf{b} - \mathbf{b}'}{\mathbf{a} - \mathbf{b}'} = \mathbf{i}$ puis en déduire que le triangle $AB'B$ est isocèle et rectangle en B' .

$$\frac{\mathbf{b} - \mathbf{b}'}{\mathbf{a} - \mathbf{b}'} = \frac{3 - 3i - 6}{3 + 3i - 6} = \frac{-3 - 3i}{-3 + 3i}$$

$$\frac{\mathbf{b} - \mathbf{b}'}{\mathbf{a} - \mathbf{b}'} = \frac{-3(1+i)}{-3(1-i)} = \frac{1+i}{1-i}$$

$$\frac{\mathbf{b} - \mathbf{b}'}{\mathbf{a} - \mathbf{b}'} = \frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = \frac{2i}{2}$$

$$\text{D'où } \frac{\mathbf{b} - \mathbf{b}'}{\mathbf{a} - \mathbf{b}'} = \mathbf{i}$$

$$\text{On a } \frac{\mathbf{b} - \mathbf{b}'}{\mathbf{a} - \mathbf{b}'} = \mathbf{i} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = \left[1; \frac{\pi}{2} \right]$$

$$\text{On a } \frac{\mathbf{b} - \mathbf{b}'}{\mathbf{a} - \mathbf{b}'} = \left[1; \frac{\pi}{2} \right] \quad \text{donc } \left| \frac{\mathbf{b} - \mathbf{b}'}{\mathbf{a} - \mathbf{b}'} \right| = 1$$

$$\text{Donc } \frac{\mathbf{BB}'}{\mathbf{AB}} = 1 \quad \text{et} \quad \arg \left(\frac{\mathbf{b} - \mathbf{b}'}{\mathbf{a} - \mathbf{b}'} \right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

$$\text{Donc } \mathbf{AB}' = \mathbf{BB}' \quad \text{et} \quad \left(\overrightarrow{\mathbf{B}'\mathbf{A}}; \overrightarrow{\mathbf{B}'\mathbf{B}} \right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

D'où le triangle $AB'B$ est isocèle et rectangle en B' .

d - En déduire que le quadrilatère $OAB'B$ est un carré

Le point \mathbf{B}' image du point B par la translation de vecteur $\overrightarrow{\mathbf{OA}}$ donc $\overrightarrow{\mathbf{BB}'} = \overrightarrow{\mathbf{OA}}$

Donc le quadrilatère $OAB'B$ est un parallélogramme

$$\text{On a } \mathbf{AB}' = \mathbf{BB}' \quad \text{et} \quad \left(\overrightarrow{\mathbf{B}'\mathbf{A}}; \overrightarrow{\mathbf{B}'\mathbf{B}} \right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \quad \text{Donc}$$

D'où le quadrilatère $OAB'B$ est un carré

Exercice 3 : (3,5 pts)

On considère la suite (U_n) définie par :

$$U_{n+1} = \frac{6U_n}{15U_n + 1} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad U_0 = 1$$

$$1) \text{a - Montrer que: } U_{n+1} - \frac{1}{3} = \frac{U_n - \frac{1}{3}}{15U_n + 1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$U_{n+1} - \frac{1}{3} = \frac{6U_n}{15U_n + 1} - \frac{1}{3} = \frac{18U_n - 15U_n - 1}{3(15U_n + 1)}$$

$$U_{n+1} - \frac{1}{3} = \frac{3(U_n - \frac{1}{3})}{3(15U_n + 1)} = \frac{U_n - \frac{1}{3}}{15U_n + 1}$$

$$\text{D'où } U_{n+1} - \frac{1}{3} = \frac{U_n - \frac{1}{3}}{15U_n + 1}$$

b - Montrer que : $U_n > \frac{1}{3} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Pour $n = 0$ on a $U_0 = 1$ donc $U_0 > \frac{1}{3}$

Soit $n \in \mathbb{N}$ supposons que $U_n > \frac{1}{3}$ et montrons

que $U_{n+1} > \frac{1}{3}$ c'est-à-dire $U_{n+1} - \frac{1}{3} > 0$

On a $U_n > \frac{1}{3}$ donc $U_n - \frac{1}{3} > 0$ et

$$15U_n + 1 > 6 \quad \text{donc } U_{n+1} - \frac{1}{3} = \frac{U_n - \frac{1}{3}}{15U_n + 1} > 0$$

$$\text{D'où } U_n > \frac{1}{3} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

2) On considère la suite (V_n) définie par :

$$V_n = 1 - \frac{1}{3U_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{6}$ puis écrire V_n en fonction de n .

Montrons que $V_{n+1} = \frac{1}{6}V_n$?

$$V_{n+1} = 1 - \frac{1}{3U_{n+1}} = 1 - \frac{1}{18U_n}$$

$$V_{n+1} = 1 - \frac{15U_n + 1}{18U_n} = \frac{18U_n - 15U_n - 1}{18U_n}$$

$$V_{n+1} = \frac{3U_n - 1}{18U_n} = \frac{3U_n}{18U_n} - \frac{1}{18U_n}$$

$$V_{n+1} = \frac{1}{6} - \frac{1}{18U_n} = \frac{1}{6}(1 - \frac{1}{3U_n})$$

$$\text{D'où } V_{n+1} = \frac{1}{6}V_n$$

D'où (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{6}$

(V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{6}$ de premier

$$\text{terme } V_0 = 1 - \frac{1}{3U_0} = \frac{2}{3} \quad V_n = V_0 \left(\frac{1}{6}\right)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\text{D'où } V_n = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{6}\right)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

3) Montrer que $U_n = \frac{1}{3 - 2\left(\frac{1}{6}\right)^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ et

en déduire $\lim U_n$

$$\begin{aligned} \text{On a } V_n &= 1 - \frac{1}{3U_n} \Leftrightarrow \frac{1}{3U_n} = 1 - V_n \\ &\Leftrightarrow 3U_n = \frac{1}{1 - V_n} \Leftrightarrow U_n = \frac{1}{3 - 3\frac{2}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^n} \\ &\Leftrightarrow U_n = \frac{1}{3 - 2\left(\frac{1}{6}\right)^n} \end{aligned}$$

$$\text{D'où } U_n = \frac{1}{3 - 2\left(\frac{1}{6}\right)^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\text{On a } U_n = \frac{1}{3 - 2\left(\frac{1}{6}\right)^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\lim U_n = \lim \frac{1}{3 - 2\left(\frac{1}{6}\right)^n} = \frac{1}{3 - 2 \times 0} = \frac{1}{3}$$

$$\text{D'où } \lim U_n = \frac{1}{3}$$

Problème : (10 pts)

Partie I :

On considère la fonction g définie sur $I =]0; +\infty[$ par : $g(x) = x - 1 + \ln x$

1) a - Montrer que $g'(x) = \frac{x+1}{x} \quad \forall x \in I$
 $g(x) = x - 1 + \ln x$

Donc $g'(x) = 1 + \frac{1}{x}$ d'où $g'(x) = \frac{x+1}{x} \quad \forall x \in I$

b - Montrer que g est croissante sur I

On a $g'(x) = \frac{x+1}{x} \quad \forall x \in]0; +\infty[$

Donc $g'(x) > 0$

D'où g est croissante sur I

2) En déduire que : $g(x) \leq 0 \quad \forall x \in]0, 1]$

Et que $g(x) \geq 0 \quad \forall x \in [1, +\infty[$

On sait que g est croissante sur $]0; +\infty[$

$$g(1) = 0$$

$$\forall x \in]0, 1] \quad \text{donc } 0 < x \leq 1$$

$$\text{donc } x \leq 1 \quad \text{donc } g(x) \leq g(1)$$

Or $g(1) = 0$

$$\text{D'où } g(x) \leq 0 \quad \forall x \in]0, 1]$$

$$\forall x \in [1, +\infty[\quad \text{donc } x \geq 1 \quad \text{donc } g(x) \geq g(1)$$

$$\text{D'où } g(x) \geq 0 \quad \forall x \in [1, +\infty[$$

Deuxième partie

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par

$$f(x) = \left(\frac{x-1}{x} \right) \ln x$$

(C_f) est la courbe représentative de f dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 1 cm)

1) a – Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ et en interpréter

le résultat géométriquement

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x-1}{x} \right) \ln x = +\infty$$

$$\text{car } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x-1}{x} \right) = -\infty$$

On a $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ la droite d'équation $x = 0$

Est une asymptote verticale à la courbe (C) .

2) a – Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-1}{x} \right) \ln x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x} \right) \ln x = +\infty$$

$$\text{car } \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{x} = 1$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \text{ ?}$$

(Remarquer que $\frac{f(x)}{x} = \left(\frac{x-1}{x} \right) \frac{\ln x}{x} \quad \forall x \in \mathbb{I}$)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(1 - \frac{1}{x} \right) \ln x}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x} \right) \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\text{Car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{x} = 1$$

c – En déduire que la courbe (C_f) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction à déterminer.

$$\text{On a } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

D'où la courbe (C) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction l'axe des abscisses.

2) a – Montrer que $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2} \quad \forall x \in \mathbb{I}$

$$f'(x) = \left(\left(\frac{x-1}{x} \right) \ln x \right)'$$

$$f'(x) = \left(1 - \frac{1}{x} \right)' \ln x + \left(1 - \frac{1}{x} \right) \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{x^2} \ln x + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1+\ln x}{x^2}$$

$$\text{D'où } f'(x) = \frac{g(x)}{x^2} \quad \forall x \in]0; +\infty[$$

b – En déduire que g est croissante sur $[1, +\infty[$ et décroissante sur $]0, 1]$.

$$\text{b) On sait que } f'(x) = \frac{g(x)}{x^2} \quad \forall x \in]0; +\infty[$$

donc le signe $f'(x)$ est celui de $g(x)$

$$\text{On a } g(x) \leq 0 \quad \forall x \in]0, 1]$$

$$\text{donc } \forall x \in]0, 1]$$

D'où f est décroissante sur $]0, 1]$

$$\text{On a } g(x) \geq 0 \quad \forall x \in [1, +\infty[$$

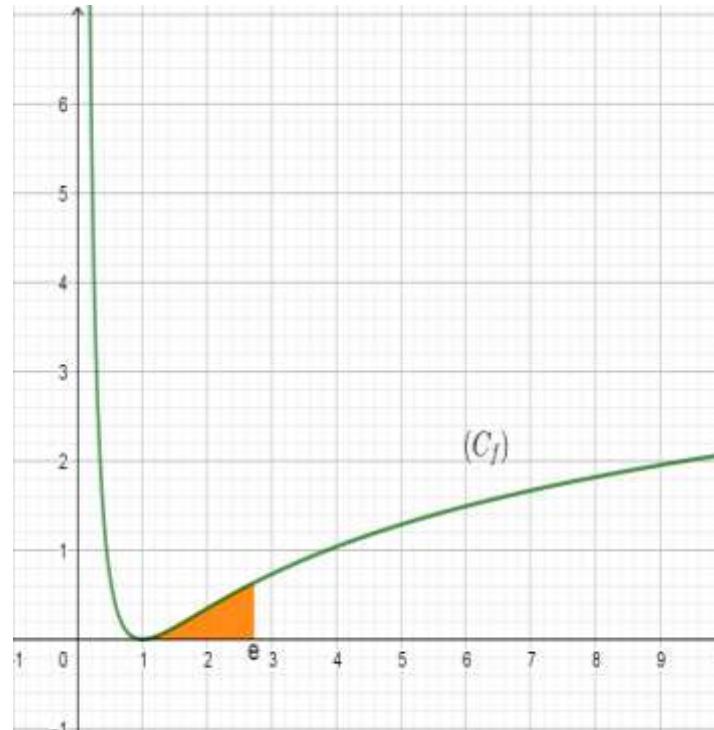
$$\text{donc } f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in [1, +\infty[$$

D'où f est croissante sur $[1, +\infty[$

c – Dresser le tableau des variations de f .

X	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	–	0	+
$f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

3) Construire la courbe (C_f) (on admettra que (C_f) possède un seul point d'inflexion dont l'abscisse est comprise entre 1,5 et 2).



4) a – Montrer que $\mathbf{H}: \mathbf{x} \rightarrow \frac{1}{2}(\ln \mathbf{x})^2$ est une primitive de $\mathbf{h}: \mathbf{x} \rightarrow \frac{\ln \mathbf{x}}{\mathbf{x}}$ sur $]0; +\infty[$

$$\mathbf{H}'(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \left[(\ln \mathbf{x})^2 \right]' = \frac{1}{2} \times 2 \times (\ln \mathbf{x}) \frac{1}{\mathbf{x}} = \frac{\ln \mathbf{x}}{\mathbf{x}}$$

$$\mathbf{H}'(\mathbf{x}) = \mathbf{h}(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{I}$$

D'où $\mathbf{H}: \mathbf{x} \rightarrow \frac{1}{2}(\ln \mathbf{x})^2$ est une primitive de

$$\mathbf{h}: \mathbf{x} \rightarrow \frac{\ln \mathbf{x}}{\mathbf{x}}$$

b – Montrer que : $\int_1^e \frac{\ln \mathbf{x}}{\mathbf{x}} d\mathbf{x} = \frac{1}{2}$

$$\int_1^e \frac{\ln \mathbf{x}}{\mathbf{x}} d\mathbf{x} = \left[\frac{1}{2} (\ln \mathbf{x})^2 \right]_1^e = \frac{1}{2} \left[(\ln e)^2 - (\ln 1)^2 \right]$$

$$\int_1^e \frac{\ln \mathbf{x}}{\mathbf{x}} d\mathbf{x} = \frac{1}{2}$$

c – A l'aide d'une intégration par parties montrer que :

$$\int_1^e \ln \mathbf{x} d\mathbf{x} = 1$$

$$\int_1^e \ln \mathbf{x} d\mathbf{x} = 1 ?$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \ln \mathbf{x} \quad \mathbf{f}'(\mathbf{x}) = \frac{1}{\mathbf{x}}$$

$$\mathbf{g}'(\mathbf{x}) = 1 \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$$

$$\int_1^e \ln \mathbf{x} d\mathbf{x} = [\mathbf{x} \ln \mathbf{x}]_1^e - \int_1^e \mathbf{d}\mathbf{x}$$

$$= e(\ln e) - 1 \ln 1 - [\mathbf{x}]_1^e = e - e + 1 = 1$$

$$\int_1^e \ln \mathbf{x} d\mathbf{x} = 1$$

5) a – Vérifier que : $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \ln \mathbf{x} - \frac{\ln \mathbf{x}}{\mathbf{x}}$ $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{I}$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \left(\frac{\mathbf{x}-1}{\mathbf{x}} \right) \ln \mathbf{x} = (1 - \frac{1}{\mathbf{x}}) \ln \mathbf{x} = \ln \mathbf{x} - \frac{\ln \mathbf{x}}{\mathbf{x}}$$

$$\text{D'où } \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \ln \mathbf{x} - \frac{\ln \mathbf{x}}{\mathbf{x}} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{I}$$

b – Montrer que l'aire du domaine limité par (C_f) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$ est $0,5 \text{ cm}^2$.

On sait que la courbe (C) est au-dessous de l'axe des abscisses sur l'intervalle $[1; e]$

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \int_1^e \ln \mathbf{x} - \frac{\ln \mathbf{x}}{\mathbf{x}} d\mathbf{x} \text{cm} \times \text{cm} \\ &= \int_1^e \ln \mathbf{x} d\mathbf{x} \text{cm}^2 - \int_1^e \frac{\ln \mathbf{x}}{\mathbf{x}} d\mathbf{x} \text{cm}^2 \\ &= (1 - \frac{1}{2}) \text{cm}^2 = \frac{1}{2} \text{cm}^2 \end{aligned}$$