

Exercice 1 : (2010 S1) (3pts)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(\mathbf{O}, \vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}})$

On considère les points $A(-1, 0, 3)$, $B(3, 0, 0)$ et $C(7, 1, -3)$ et (S) la sphère d'équation : $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 2y - 15 = 0$

1) Montrer que : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 3\vec{\mathbf{i}} + 4\vec{\mathbf{k}}$ et en déduire que : $3x + 4z - 9 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC) .

2) Montrer que (S) est la sphère de centre $\Omega(3, 1, 0)$ et de rayon 5

3) Soit (Δ) la droite passant par Ω et perpendiculaire au plan (ABC) .

a) Montrer que $\begin{cases} \mathbf{x} = 3 + 3\mathbf{t} \\ \mathbf{y} = 1 \quad (\mathbf{t} \in \mathbb{R}) \\ \mathbf{z} = 4\mathbf{t} \end{cases}$ est une

représentation paramétrique de la droite (Δ) .

b) Montrer que la droite (Δ) coupe la sphère (S) aux deux points $E(6, 1, 4)$ et $F(0, 1, -4)$

Exercice 2 : (2010 S1) (3pts)

1) Résoudre dans C l'équation : $\mathbf{z}^2 - 6\mathbf{z} + 10 = 0$

2) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(\mathbf{O}; \vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}})$ on considère les points A , B et C d'affixes respectives $\mathbf{a} = 3 - \mathbf{i}$, $\mathbf{b} = 3 + \mathbf{i}$; $\mathbf{c} = 7 - 3\mathbf{i}$
Soit z l'affixe du point M du plan et z' l'affixe du point M' image de M par la rotation R de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

a) Montrer que : $z' = \mathbf{i}z + 2 - 4\mathbf{i}$

b) Vérifier que : l'affixe du point C' l'image du point C par la rotation R est : $\mathbf{c}' = 5 + 3\mathbf{i}$

c) Montrer que : $\frac{\mathbf{c}' - \mathbf{b}}{\mathbf{c} - \mathbf{b}} = \frac{1}{2}\mathbf{i}$ puis en déduire que le

triangle BCC' est rectangle en B et $\mathbf{BC} = 2\mathbf{BC}'$

Exercice 3 : (2010 S1) (3pts)

Une caisse contient dix boules : 5 boules blanches, 3 boules rouges et deux boules noires (indiscernables au toucher).

On tire au hasard et simultanément quatre boules de la caisse.

1) On considère les deux événements :

A "Obtenir une seule boule rouge"

B "Obtenir une boule blanche au moins"

Montrer que $\mathbf{P}(\mathbf{A}) = \frac{1}{2}$ et $\mathbf{P}(\mathbf{B}) = \frac{41}{42}$

2) Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associer le nombre de boules rouges tirées.

a) Vérifier que les valeurs prises par X sont $0 ; 1 ; 2 ; 3$

b) Montrer que $\mathbf{P}(\mathbf{X} = 0) = \frac{1}{6}$ et $\mathbf{P}(\mathbf{X} = 2) = \frac{3}{10}$

c) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X

Exercice 4 : (2010 S1) (3pts)

On considère la suite (U_n) définie par :

$$U_{n+1} = \frac{3U_n - 1}{2U_n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad U_0 = 2$$

1) Montrer que : $U_n - 1 > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

2) Soit (V_n) définie par : $V_n = \frac{U_n - 1}{2U_n - 1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique de

raison $\frac{1}{2}$ et en déduire que $V_n = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

b) Montrer que : $U_n = \frac{V_n - 1}{2V_n - 1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

en déduire que $\lim U_n = 1$

3) Calculer $\lim W_n$ telle que (W_n) la suite définie par :

$$W_n = \ln U_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Problème : (2010 S1) (8pts)

I) On considère la fonction g définie sur \mathbb{R} par :

$$g(\mathbf{x}) = 1 + 4\mathbf{x}e^{2\mathbf{x}}$$

1) Montrer que $g'(\mathbf{x}) = 4(2\mathbf{x} + 1)e^{2\mathbf{x}} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}$

2) Montrer que g est croissante sur $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right]$ et décroissante sur $\left]-\infty; -\frac{1}{2}\right]$.

3) a) Montrer que $g\left(-\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{2}{e}$ et vérifier que $g\left(-\frac{1}{2}\right) > 0$

b) En déduire que $g(\mathbf{x}) > 0$ pour tout x de \mathbb{R} .

II) On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par

$$f(\mathbf{x}) = (2\mathbf{x} - 1)e^{2\mathbf{x}} + \mathbf{x} + 1$$

(C_f) est la courbe représentative de f dans le repère orthonormé $(\mathbf{O}; \vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}})$ (unité : 2 cm)

1) a) Calculer $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow +\infty} f(\mathbf{x})$ puis montrer que

$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow -\infty} f(\mathbf{x}) = -\infty$ (on rappelle que $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow -\infty} \mathbf{x}e^{\mathbf{x}} = 0$)

2) Montrer que : $f'(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})$ puis en déduire que la fonction f est strictement croissante sur \mathbb{R}

3) a) Calculer $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow +\infty} \frac{f(\mathbf{x})}{\mathbf{x}}$ et en déduire que la la courbe

(C) admet une branche parabolique au voisinage de $+\infty$ de direction l'axe des ordonnées

b) Calculer $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow -\infty} [f(\mathbf{x}) - (\mathbf{x} + 1)]$ en déduire que la droite (Δ) d'équation $\mathbf{y} = \mathbf{x} + 1$ est asymptote à (C) au voisinage de $-\infty$.

c) Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la droite (Δ) et la courbe (C) puis montrer que la courbe (C) est en dessous de la droite (Δ) sur l'intervalle $\left]-\infty; \frac{1}{2}\right]$ et qu'elle est au-dessus de la droite (Δ) sur

l'intervalle $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right]$

4) a) Montrer que $y = x$ une équation cartésienne de la droite (T) tangente à la courbe (C) au point O .

b) Montrer que la courbe (C) possède un point d'infexion d'abscisse $-\frac{1}{2}$ (la détermination de l'ordonnée du point d'infexion n'est pas demandée)

5) Construire les droites (Δ) et (T) et la courbe (C)

6) a) montrer que : $\int_0^{\frac{1}{2}} (2\mathbf{x} - 1)e^{2\mathbf{x}} d\mathbf{x} = 1 - \frac{e}{2}$

b) Montrer que l'aire du domaine plan limité par (C) , la tangente (T) à (C) et les deux droites $x = 0$ et $\mathbf{x} = \frac{1}{2}$ est $(6 - 2e)\text{cm}^2$