

Lycée Ibn Zohr Tanger	Devoir libre 2 Semestre 1	P. Hicham ESSAFI 2022 /2021
--------------------------	------------------------------	--------------------------------

Exercice 1 :

Soit f la fonction définie par : $f(x) = x - 2\sqrt{x} + 2$

(C_f) sa courbe dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

- 1) Déterminer D_f et calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- 2) Etudier les branches infinies de la courbe (C_f)
- 3) Etudier la position relative de la courbe (C_f) et la droite (Δ) d'équation $(\Delta): y = x$
- 4) a) Etudier la dérивabilité de la fonction f à droite en 0
 b) Calculer $f'(x)$ pour tout x de $]0; +\infty[$
 c) Dresser le tableau de variation de la fonction f
 d) Construire (Δ) et (C_f)
- 5) On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ ($\forall n \in \mathbb{N}$).
 a) Montrer par récurrence que, $u_n > 1$ ($\forall n \in \mathbb{N}$).
 b) Montrer que (u_n) est décroissante, en déduire qu'elle convergente.
 c) Calculer la limite de la suite (u_n)

Exercice 2 : On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 2$ ($\forall n \in \mathbb{N}$)

- 1) Calculer u_1 , u_2 et u_3 .
- 2) a) Démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 4$, $u_n \geq 0$.
 b) En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 5$, $u_n \geq n - 3$.
 c) En déduire la limite de la suite (u_n) .
- 3) On définit la suite (v_n) par : $v_n = -2u_n + 3n - \frac{21}{2}$ ($\forall n \in \mathbb{N}$).
 a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme.
 b) En déduire que : $u_n = \frac{25}{4} \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2}n - \frac{21}{4}$ ($\forall n \in \mathbb{N}$).
 c) Soit la somme S_n définie par : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ ($\forall n \in \mathbb{N}$).
 Déterminer l'expression de S_n en fonction de n .